Simulazione prova di Algebra

(Prova svolta)

Liceo Wiligelmo-Modena-

12 Ottobre 2021

La matematica è l'arte di dare lo stesso nome a cose diverse
(Henri Poincaré).

Cognome______________________________ Nome______________________ Classe_______

Esercizio 1 *Risolvere la seguente equazione numerica intera:*

$$\frac{-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}}{2\left(\frac{3}{2}-1\right)^2}=4x\left(1-\frac{x}{2}\right)+1$$

Svolgimento

$$\frac{-x^2-x-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}{2\left(\frac{1}{2}\right)^2}=4x-2x^2+1 \Longrightarrow \frac{\frac{-4x^2-4x-1-2}{4}}{\frac{1}{2}}=4x-2x^2+1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{-4x^2-4x-1-2}{4}\cdot 2=4x-2x^2+1 \Longrightarrow \frac{-4x^2-4x-1-2}{2}=4x-2x^2+1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow -4x^2-4x-3=8x-4x^2+2 \Longrightarrow 12x=-5 \Longrightarrow x=-\frac{5}{12}$$

Esercizio 2 *Risolvere la seguente equazione numerica fratta:*

$$\frac{\frac{1}{y-1}}{\frac{y-1}{y}}-\frac{1}{y-1}=\frac{3y-2}{y^2-2y+1}$$

Svolgimento

$$\frac{1}{y-1}\cdot\frac{y}{y-1}-\frac{1}{y-1}-\frac{3y-2}{(y-1)^2}=0 \Longrightarrow \frac{y}{(y-1)^2}-\frac{1}{y-1}-\frac{3y-2}{(y-1)^2}=0$$

In questo caso si ha $C.A.: X=\mathbb{R}-\{1\}.$, il $m.c.m.=(y-1)^2$

$$\frac{y-y+1-3y+2}{(y-1)^2}=0 \Longrightarrow 1-3y+2=0 \Longrightarrow 3y=3 \Longrightarrow y=1$$

Soluzione non accettabile e dunque l'equazione è impossibile.

Esercizio 3 *Risolvere la seguente disequazione numerica intera:*

$$-(2z-1)^3+\frac{1}{4}\leq 4z\left(3z+\frac{1}{4}\right)-(2z+1)(4z^2-2z+1)-z$$

Svolgimento

$$-8z^3+12z^2-6z+1+\frac{1}{4}\leq 12z^2+z-8z^3-1-z \Longrightarrow -6z+1+\frac{1}{4}\leq -1 \Longrightarrow -24z+4+1\leq -4 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 24z\geq 9 \Longrightarrow z\geq\frac{3}{8}, \text{ dunque } S=\left[\frac{3}{8},+\infty\right)$$

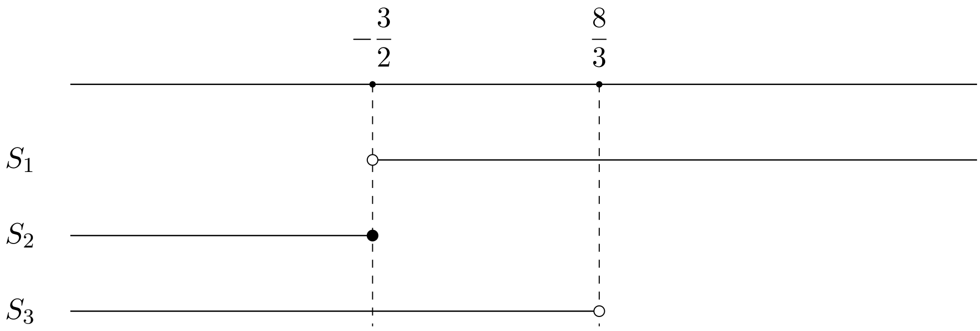
Esercizio 4 *Risolvere il seguente sistema di disequazioni intere:*

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{3}t - 1 < \dfrac{1}{3}t \\[2ex] -\dfrac{1}{2}t + \dfrac{1}{4}(1-2t)(2t+1) \geq -(1-t)^2 + 5 \\[2ex] \left(1 - \dfrac{t}{2}\right)\left(-\dfrac{t}{2} + 1\right) + 1 > -\dfrac{1}{4}t\,(-t+1) \end{cases}$$

Svolgimento

$$\begin{cases} -t - 3 < t \\[2ex] -\dfrac{1}{2}t + \dfrac{1}{4}(1-4t^2) \geq -1 + 2t - t^2 + 5 \\[2ex] \left(1 - \dfrac{t}{2}\right)^2 + 1 > \dfrac{1}{4}t^2 - \dfrac{1}{4}t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2t > -3 \\[2ex] -\dfrac{1}{2}t + \dfrac{1}{4} - t^2 \geq -1 + 2t - t^2 + 5 \\[2ex] 1 - t + \dfrac{1}{4}t^2 + 1 > \dfrac{1}{4}t^2 - \dfrac{1}{4}t \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} t > -\dfrac{3}{2} \\[2ex] -2t + 1 \geq -4 + 8t + 20 \\[2ex] 4 - 4t + 4 > -t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t > -\dfrac{3}{2} \\[2ex] 10t \leq -15 \\[2ex] 3t < 8 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t > -\dfrac{3}{2} \\[2ex] t \leq -\dfrac{3}{2} \\[2ex] t < \dfrac{8}{3} \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} S_1 = \left(-\dfrac{3}{2}, +\infty\right) \\[2ex] S_2 = \left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right] \\[2ex] S_3 = \left(-\infty, \dfrac{8}{3}\right) \end{matrix}$$



Dal grafico si evince che il sistema di disequazioni è incompatibile e non ammette soluzioni, dunque $S = \emptyset$. Vi faccio osservare con attenzione che se nella prima disequazione del sistema ci fosse stato il $\leq$ il sistema ammetteva come soluzione $S = \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$. Le ultime due disequazioni in $t = -\dfrac{3}{2}$ sono compatibili, la prima solamente non ammette soluzione!!! Fate bene attenzione!!!

Esercizio 5 *Risolvere il seguente sistema di disequazioni:*

$$\begin{cases} \dfrac{w+3}{-w} > \dfrac{(1-w)(1+w)}{w^2+w} \\ \\ -(w^2-w+1)^2 > -(w^2+1)^2 + w(2w^2-w-3) - 1 \end{cases}$$

Svolgimento

$$\begin{cases} -\dfrac{w+3}{w} - \dfrac{1-w^2}{w(w+1)} > 0 \\ \\ -w^4 - w^2 - 1 + 2w^3 - 2w^2 + 2w > -w^4 - 2w^2 - 1 + 2w^3 - w^2 - 3w - 1 \end{cases}$$

Ora c'è un accorgimento da mettere in evidenza, nella seconda frazione della prima disequazione c'è il fattore $w+1$ che si può anche elidere ma non in maniera brutale, bisogna supporre che $w \neq -1$ e ricordarselo!!! L'altra maniera è procedere normalmente, si comprende che semplificando il calcolo viene più agevole e allo stesso tempo ricordarsi di togliere la soluzione $w = -1$.

In questo caso procediamo da buontemponi:

$$\begin{cases} \dfrac{-(w+3)(w+1) - 1 + w^2}{w(w+1)} > 0 \\ \\ 2w + 3w > -1 \end{cases} \implies \begin{cases} \dfrac{-w^2 - 4w - 3 - 1 + w^2}{w(w+1)} > 0 \\ \\ 5w > -1 \end{cases} \implies \begin{cases} \dfrac{-4(w+1)}{w(w+1)} > 0 \\ \\ w > -\dfrac{1}{5} \end{cases}$$

Questo è equivalente a risolvere il seguente sistema (ricordate i coefficienti negativi!!!): $\begin{cases} \dfrac{w+1}{w(w+1)} < 0 \\ \\ w > -\dfrac{1}{5} \end{cases}$

La **(PARTE 1)** consiste nel determinare le soluzioni della prima disequazione del sistema che è una disequazione fratta: $\dfrac{w+1}{w(w+1)} < 0$.

$F_1 : w + 1 > 0 \implies w > -1 \implies S_1 = (-1, +\infty)$

$F_2 : w > 0 \implies S_2 = (0, +\infty)$

$F_3 : w + 1 > 0 \implies w > -1 \implies S_3 = (-1, +\infty)$

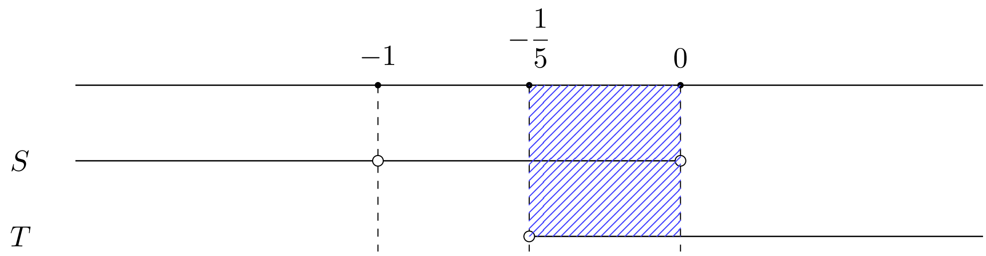
A questo punto avendo "in mano" i segni di tutti i fattori possiamo fare il seguente grafico:

		-1		0	
F_1	$-$	$\circ$	$+$		$+$
F_2	$-$		$-$	$\circ$	$+$
F_3	$-$		$+$		$+$
$\dfrac{N}{D}$	$-$		$-$		$+$

Concludiamo che la soluzione della prima disequazione è $S = (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$.

La **(PARTE 2)** è semplice perche la soluzione della seconda disequazione del sistema risulta $T = \left(-\dfrac{1}{5}, +\infty\right)$.

Ora dobbiamo fare la rappresentazione grafica per determinare le soluzioni del sistema:



Concludiamo che la soluzione del sistema è $S_G = \left(-\dfrac{1}{5}, 0\right)$.

Osservazione 1 *Se non si procede da buontemponi la disequazione* $\dfrac{w+1}{w(w+1)} < 0$ *si risolve semplificando il fattore* $w+1$, *ci si ricorda di togliere la soluzione* $w = -1$, *in maniera banale e immediata. Se mi ricordate di questo fatto vi farò vedere!!! Ho voluto procedere per la strada normale perchè in casi di ordinaria amministrazione numeratore e denominatore non hanno un fattore comune.*

Esercizio 6 *Determinare due numeri dispari consecutivi sapendo che sottraendo* 11 *alla loro somma si ottengono i* $\dfrac{5}{3}$ *del minore.*

Svolgimento

I due numeri naturali $a, b \in \mathbb{N}_0$ li indicheremo con:

$$a = 2k + 3 \qquad \text{e} \qquad b = 2k + 1$$

Dobbiamo impostare la relazione:

$$a + b - 11 = \frac{5}{3} b$$

Sostituendo si ottiene:

$2k + 3 + 2k + 1 - 11 = \dfrac{5}{3}(2k+1) \Longrightarrow 4k - 7 = \dfrac{5}{3}(2k+1) \Longrightarrow 12k - 21 = 10k + 5 \Longrightarrow 2k = 26$ e finalmente $k = 13$. Sostituendo il valore trovato abbiamo $a = 29$ e $b = 27$.