Nota sui sistemi lineari

Liceo Assteas -Buccino-

F. Fernicola 28 Gennaio 2025

In questa nota iniziale tratteremo esclusivamente i *sistemi lineari di* 2 *equazioni in* 2 *variabili.* Quando dirò *sistema lineare* mi riferisco sempre ad un *sistema lineare di* 2 *equazioni in* 2 *variabili.* Un sistema lineare in forma normale assume la seguente espressione:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Un esempio di sistema lineare è il seguente:

$$\begin{cases} 4x - 5y = 7 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases}$$

Ora che abbiamo assegnato un sistema lineare che cosa facciamo? Lo dobbiamo portare a passeggio o consumarlo come spuntino durante il break a scuola!!! No, molti dicono che si deve risolvere! Si proprio cosi, bisogna saper risolvere un sistema lineare. Ma che cosa significa risolvere un sistema lineare? Significa trovare, se esistono, delle coppie ordinate di numeri reali (x_0, y_0) che soddisfano contemporaneamente le due equazioni lineari scritte nella parentesi graffa. Per esempio la coppia $(-2, -3)$ soddisfa la prima equazione ma non soddisfa la seconda e non va bene. La coppia $(0, 3)$ soddisfa la seconda equazione ma non la prima e anche questa è da buttare. La coppia $(3, 1)$ è quella che vince *il campionato del mondo* perchè come potete verificare soddisfa sia la prima equazione che la seconda.

I curiosi diranno e come si fa a determinare la coppia che vince il campionato del mondo? Si procede per tentativi? In matematica non si procede mai per tentativi. Se vado alla ricerca di *tartufi*, di certo non vado sulla battigia della **spiaggia di Paestum** nel mese di Luglio!! Non si procede con le bende sugli occhi, un matematico ha occhi aperti e non dorme mai. Il matematico **Paul Erdos** (trovate su internet!) diceva sempre che c'è tempo per riposare, bisogna restare svegli per scrivere teoremi!!

Intanto avrete intuito che un'equazione che compone un sistema lineare rappresenta una retta nel piano cartesiano. Non deve essere tanto difficile intuire che un sistema lineare può assumere uno dei tre seguenti comportamenti (riproduce il comportamento che due rette possono avere in un piano cartesiano):

- **(A)** Sistema lineare che non ammette soluzioni (in questo caso trattasi di rette parallele distinte)
- **(B)** Sistema lineare che ammette un'unica soluzione (in questo caso trattasi di rette incidenti)
- **(C)** Sistema lineare che ammette infinite soluzioni (in questo caso trattasi di rette coincidenti)

Definizione 1 *Un sistema lineare che non ammette soluzioni si dice* IMPOSSIBILE. *Un sistema lineare che ammette un'unica soluzione* (x_0, y_0) *si dice* DETERMINATO. *Un sistema lineare che ammette infinite soluzioni si dice* INDETERMINATO. *I sistemi lineari* DETERMINATI e INDETERMINATI *sono detti anche* COMPATIBILI *ed evidentemente i sistemi lineari* IMPOSSIBILI *sono detti* INCOMPATIBILI.

SISTEMA LINEARE → COMPATIBILE → 1 soluzione DETERMINATO

SISTEMA LINEARE → COMPATIBILE → ∞ soluzioni INDETERMINATO

SISTEMA LINEARE → INCOMPATIBILE → 0 soluzioni IMPOSSIBILE

Ora che conosciamo la natura dei sistemi lineari, vediamo di comprendere quali sono le tecniche per capire se un sistema è *impossibile, determinato o indeterminato* e nel caso sia *compatibile* come si trova l'unica soluzione o le infinite soluzioni. Esistono quattro metodi per risolvere un sistema lineare:

- **Metodo di sostituzione**
- **Metodo di confronto**
- **Metodo di somma o differenza**
- **Metodo di Cramer**

METODO DI SOSTITUZIONE

Prima di vedere come si applica questo metodo cerchiamo di sviscerarne la sua filosofia. Mettiamo subito in chiaro che cambiare di posto le equazioni del sistema lineare non condiziona la natura del sistema in relazione alle soluzioni. C'è libertà di spostamento!

1. Si esplicita da una delle due equazioni una delle due variabili, quella che può risultare o più simpatica o più conveniente (le variabili che hanno 1 e -1 dovranno essere i vostri clienti preferiti!).
2. Si sostituisce il valore della variabile nell'altra equazione.
3. Quest'ultima equazione diventa un'equazione in una variabile e si risolve.
4. L'eventuale valore trovato si sostituisce nell'equazione in precedenza esplicitata e si determina in tal modo la soluzione.

Troppe parole non mi piacciono e confondono l'interlocutore, non voglio buttare fumo negli occhi, passiamo ai fatti concreti:

Esempio 1 *Risolvere il sistema lineare:* $\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ \\ 3x - y = -2 \end{cases}$

Svolgimento

Sono furbo e visto che ho libertà di scelta ricavo y dalla seconda equazione e sostituisco il valore di y trovato nella prima equazione: $\begin{cases} y = 3x + 2 \\ \\ 4x + 3(3x + 2) = 1 \end{cases}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} y = 3x + 2 \\ \\ 4x + 9x + 6 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = 3x + 2 \\ \\ 13x = -5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{5}{13} \\ \\ y = 3\left(-\dfrac{5}{13}\right) + 2 = -\dfrac{15}{13} + 2 = \dfrac{11}{13} \end{cases}$$

Possiamo dire che il sistema lineare assegnato è determinato e ammette come soluzione $S = \left\{ \left(-\frac{5}{13}, \frac{11}{13} \right) \right\}$. Non fidate, fate sempre dei controlli se quello che avete trovato merita la medaglia d'oro (verificate se le due equazioni contengono "il punto").

Esempio 2 *Risolvere il sistema lineare:* $\begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ \\ -3x + 2y = 1 \end{cases}$

Svolgimento

In questo caso non posso fare scelte furbe, devo introdurre per forza coefficienti frazionari, ricavo y dalla prima equazione e sostituisco il valore di y trovato nella seconda equazione:

$$\begin{cases} y = \dfrac{3x - 3}{2} \\ \\ -3x + 2\left(\dfrac{3x - 3}{2}\right) = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3x - 3}{2} \\ \\ -3x + 3x - 3 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3x - 3}{2} \\ \\ 0x = 4 \end{cases}$$

Abbiamo finito, poiche un'equazione del sistema lineare è impossibile il sistema lineare stesso è impossibile e quindi $S = \emptyset$. Le rette assegnate sono parallele distinte.

Esempio 3 *Risolvere il sistema lineare:* $\begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ \\ -4x + 10y = 2 \end{cases}$

Svolgimento

In questo caso non posso fare scelte furbe, devo introdurre per forza coefficienti frazionari, ricavo x dalla prima equazione e sostituisco il valore di x trovato nella seconda equazione:

$$\begin{cases} x = \dfrac{5y - 1}{2} \\ \\ -4\left(\dfrac{5y - 1}{2}\right) + 10y = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5y - 1}{2} \\ \\ -10y + 2 + 10y = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5y - 1}{2} \\ \\ 0y = 0 \end{cases}$$

Abbiamo finito, poiché un'equazione del sistema lineare è indeterminata il sistema lineare stesso è indeterminato e quindi $S = \left\{ \left(\dfrac{5y_0 - 1}{2}, y_0 \right) \mid y_0 \in \mathbb{R} \right\}$. Le rette assegnate sono coincidenti.

METODO DI CONFRONTO

Prima di vedere come si applica questo metodo cerchiamo di sviscerarne la sua filosofia.

1. Si decide di esplicitare la stessa variabile in entrambi le equazioni. Certe volte si sceglie la variabile "più comoda". (Pensate ai migliori clienti!).
2. Si scrive il sistema con una delle due variabili esplicitate rispetto all'altra e l'altra equazione data dal confronto.
3. Quest'ultima equazione diventa un'equazione in una variabile e si risolve.
4. L'eventuale valore trovato si sostituisce nell'equazione in precedenza esplicitata e si determina in tal modo la soluzione.

Troppe parole non mi piacciono e confondono l'interlocutore, passiamo ai fatti concreti:

Esempio 4 *Risolvere il sistema lineare:* $\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ \\ 3x - y = -2 \end{cases}$

Svolgimento

Sono furbo e visto che ho libertà di scelta ricavo y da entrambe le equazioni: $\begin{cases} y = \dfrac{-4x+1}{3} \\ \\ y = 3x + 2 \end{cases}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} y = 3x + 2 \\ \\ 3x + 2 = \dfrac{-4x+1}{3} \end{cases} \quad \Longrightarrow \begin{cases} y = 3x + 2 \\ \\ 9x + 6 = -4x + 1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \begin{cases} 13x = -5 \\ \\ y = 3x + 2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{5}{13} \\ \\ y = 3\left(-\dfrac{5}{13}\right) + 2 = -\dfrac{15}{13} + 2 = \dfrac{11}{13} \end{cases}$$

Possiamo dire che il sistema lineare assegnato è determinato e ammette come soluzione $S = \left\{\left(-\dfrac{5}{13}, \dfrac{11}{13}\right)\right\}$

Esempio 5 *Risolvere il sistema lineare:* $\begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ \\ -3x + 2y = 1 \end{cases}$

Svolgimento

In questo caso non posso fare scelte furbe, devo introdurre per forza coefficienti frazionari, ricavo y da entrambe le equazioni:

$$\begin{cases} y = \dfrac{3x-3}{2} \\ \\ y = \dfrac{3x-1}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3x-1}{2} \\ \\ \dfrac{3x-1}{2} = \dfrac{3x-3}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3x-1}{2} \\ \\ 3x - 1 = 3x - 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3x-1}{2} \\ \\ 0x = -2 \end{cases}$$

Abbiamo finito, poiché un'equazione del sistema lineare è impossibile il sistema lineare stesso è impossibile e quindi $S = \emptyset$. Le rette assegnate sono parallele distinte.

Esempio 6 *Risolvere il sistema lineare:* $\begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ \\ -4x + 10y = 2 \end{cases}$

Svolgimento

In questo caso non posso fare scelte furbe, devo introdurre per forza coefficienti frazionari, ricavo x da entrambe le equazioni:

$$\begin{cases} x = \dfrac{5y-1}{2} \\ \\ x = \dfrac{10y-2}{4} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5y-1}{2} \\ \\ \dfrac{5y-1}{2} = \dfrac{10y-2}{4} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5y-1}{2} \\ \\ 10y - 2 = 10y - 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5y-1}{2} \\ \\ 0y = 0 \end{cases}$$

Abbiamo finito, poiché un'equazione del sistema lineare è indeterminata il sistema lineare stesso è indeterminato e quindi $S = \left\{ \left(\dfrac{5y_0 - 1}{2}, y_0 \right) \ \mid \ y_0 \in \mathbb{R} \right\}$. Le rette assegnate sono coincidenti.

<u>METODO DI ADDIZIONE o SOTTRAZIONE</u>

Prima di vedere come si applica questo metodo cerchiamo di sviscerarne la sua filosofia. Bisogna subito dire che determinate operazioni non cambiano la natura del sistema lineare, ci sono certe operazione che pur cambiando l'aspetto lo lasciano inalterato dal punto di vista delle soluzioni. Quali sono le operazioni che lasciano il sistema lineare equivalente a quello assegnato? Sono le seguenti:

(A) $e_i \longrightarrow e_j$ (scambio delle equazioni del sistema).

(B) $e_i \longrightarrow \alpha \cdot e_i + \beta \cdot e_j$ con $\alpha \neq 0$ (ad una equazione del sistema si sostituisce la combinazione lineare delle equazioni).

Le due operazioni precedenti (A) e (B) si dicono operazioni elementari e applicandole alle equazioni di un sistema lineare, pur cambiando nell'aspetto, esso resta equivalente a quello precedente. Vediamo come funzionano le due operazioni precedenti:

Esempio 7 *Sia stato assegnato il seguente sistema lineare (1):* $\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ 3x - y = -2 \end{cases}$

Non bisogna meravigliarsi se affermiamo che il sistema (2): $\begin{cases} 3x - y = -2 \\ 4x + 3y = 1 \end{cases}$ abbia le medesime soluzioni del sistema lineare (1). Nel passaggio dal (1) al (2) abbiamo applicato la regola (A). Cosa dire se considerassi il sistema lineare (3): $\begin{cases} -x + 9y = 8 \\ -8x - 11y = -7 \end{cases}$

Se vi chiedessi che relazione esiste tra il sistema lineare (1) e il (3) sono convinto che mi direste che non hanno nulla in comune! Le apparenze ingannano e si può ben dire che il sistema lineare (3) è proprio un camuffamento del sistema lineare (1). Ve lo dimostro!

$-x + 9y = 8 \longrightarrow 2 \cdot (4x + 3y = 1) - 3 \cdot (3x - y = -2)$

$-8x - 11y = -7 \longrightarrow -3 \cdot (4x + 3y = 1) + 2 \cdot (3x - y = -2)$

Queste considerazioni ci dicono che assegnato un sistema lineare S lo possiamo manipolare mediante le trasformazioni di riga A e B, otteniamo il sistema T però S e T sono sistemi lineari equivalenti; risolvere l'uno o l'altro porta alla medesima conclusione. Questi sono fatti che si dimostrano mettendo NERO su BIANCO, noi prenderemo per buono quello che vi dico. Siate fiduciosi che se operate in questo modo non vi sbagliate, vi dovete fidare di me!

Proprio sulla filosofia precedente si basa il *METODO DI ADDIZIONE O SOTTRAZIONE* per risolvere un sistema lineare:

1. Noi sappiamo che equazioni che differiscono per un fattore moltiplicativo non nullo hanno le stesse soluzioni.
2. Sulla base del principio precedente, moltiplicando per fattori opportuni facciamo comparire la stessa variabile nelle due equazioni con coefficiente uguale o opposto.
3. Si scrive il sistema con una delle due equazioni.
4. L'altra equazione del sistema si scrive sommando o sottraendo membro a membro le due equazioni del sistema.
5. Quest'ultima equazione diventa un'equazione in una variabile e si risolve
6. L'eventuale valore trovato si sostituisce nell'altra equazione e si determina in tal modo la soluzione.

Troppe parole non mi piacciono e confondono l'interlocutore, passiamo ai fatti concreti:

Esempio 8 *Risolvere il sistema lineare:* $\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ \\ 3x - y = -2 \end{cases}$

Svolgimento

Sono furbo e moltiplico per 3 la seconda equazione: $\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ \\ 9x - 3y = -6 \end{cases}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 3x - y = -2 \\ 13x = -5 \end{cases} \quad \Longrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{5}{13} \\ \\ 3\left(-\dfrac{5}{13}\right) - y = -2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{5}{13} \\ \\ -15 - 13y = -26 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{5}{13} \\ \\ y = \dfrac{11}{13} \end{cases}$$

Possiamo dire che il sistema lineare assegnato è determinato e ammette come soluzione $S = \left\{\left(-\dfrac{5}{13}, \dfrac{11}{13}\right)\right\}$

Esempio 9 *Risolvere il sistema lineare:* $\begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ \\ -3x + 2y = 1 \end{cases}$.

Svolgimento

In questo caso la torta è già pronta:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ \\ 0x + 0y = 4 \end{cases}$$

Abbiamo finito, poiché un'equazione del sistema lineare è impossibile il sistema lineare stesso è impossibile e quindi $S = \emptyset$. Le rette assegnate sono parallele distinte.

Esempio 10 *Risolvere il sistema lineare:* $\begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ \\ -4x + 10y = 2 \end{cases}$.

Svolgimento

Sono furbo e moltiplico per 2 la prima equazione:

$$\begin{cases} 4x - 10y = -2 \\ \\ -4x + 10y = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$$

Abbiamo finito, poiché un'equazione del sistema lineare è indeterminata il sistema lineare stesso è indeterminato e quindi $S = \left\{ \left(\frac{5y_0 - 1}{2}, y_0 \right) \mid y_0 \in \mathbb{R} \right\}$. Le rette assegnate sono coincidenti.

<u>METODO Di CRAMER</u>

Proposizione 2 ***(Teorema di Cramer)***

Sia assegnato il seguente sistema lineare : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

Si consideri la matrici $A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$. *Allora vale quanto si afferma:*

1. *Se* $det(A) \neq 0$, *allora esiste un'unica soluzione:*
$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{det(A)} \qquad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{det(A)}$$
2. *Se* $det(A) = 0$, *allora bisogna calcolare i determinanti delle seguenti matrici:*
$$B = \begin{pmatrix} c & b \\ c' & b' \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} a & c \\ a' & c' \end{pmatrix}$$
Se $det(B) \neq 0$ *o* $det(C) \neq 0$, *allora il sistema è* ***IMPOSSIBILE***. *Se, al contrario,* $det(B) = 0$ *e* $det(C) = 0$ *il sistema sarà* ***INDETERMINATO***.

Vediamo come si applica questo *Teorema*.

Esempio 11 *Risolvere il sistema lineare:* $\begin{cases} 4x - 5y = 7 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases}$. *Questo è il sistema lineare assegnato all'inizio della nota!*

Svolgimento

Considero la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ e poichè $det(A) = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 - (-5) \cdot 2 = 12 + 10 = 22 \neq 0$, allora il sistema lineare sarà **DETERMINATO** e la soluzione la trovo con le formule menzionate nella proposizione del *Teorema di Cramer*:

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 9 & 3 \end{vmatrix}}{22} = \frac{21 + 45}{22} = \frac{66}{22} = 3 \qquad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}}{22} = \frac{12 + 10}{22} = \frac{22}{22} = 1$$

La soluzione del sistema è quindi $S = \{(3, 1)\}$!!

Esempio 12 *Risolvere il sistema lineare:* $\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ 4x - 6y = 5 \end{cases}$.

Svolgimento

Considero la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$ e poichè $det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-6) - 4 \cdot (-3) = -12 + 12 = 0$, allora bisogna calcolare i determinanti delle seguenti matrici:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

.

Poichè $det(B) = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-6) - 5 \cdot (-3) = -12 + 15 = 3 \neq 0$, possiamo dire che il sistema lineare è **IMPOSSIBILE** e quindi $S = \emptyset$.

Esempio 13 *Risolvere il sistema lineare:* $\begin{cases} -3x + y = -2 \\ 6x - 2y = 4 \end{cases}$.

Svolgimento

Considero la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ e poichè $det(A) = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-2) - 6 \cdot 1 = 6 - 6 = 0$, allora bisogna calcolare i determinanti delle seguenti matrici:

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

.

Poichè $det(B) = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-2) - 4 \cdot 1 = 4 - 4 = 0$ e $det(C) = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -2 \cdot 4 - 4 \cdot (-2) = -8 + 8 = 0$,allora per quanto affermato nel *Teorema di Cramer* il sistema lineare sarà **INDETERMINATO**. Le soluzioni sono quelle relative ad una delle due equazioni che compongono il sistema lineare. Si sceglie a gusto, ad esempio io determino le soluzioni della prima, ovvero $-3x + y = -2$.

La variabile liberà è x e quindi $y = 3x_0 - 2$. Possiamo dire che le soluzioni del sistema assegnato è dato dall'insieme $S = \{(x_0, 3x_0 - 2) \mid x_0 \in \mathbb{R}\}$.