Nozioni di base sul valore assoluto

Istituto ”ASSTEAS”-Buccino-
F. Fernicola 9 Novembre 2024

Definizione 1 *Assegnato un numero reale $a \in \mathbb{R}$ si definisce* valore assoluto di a *il seguente numero:*

$$|a| = \begin{cases} a & se\ a \geq 0 \\ -a & se\ a < 0 \end{cases}$$

Osserviamo dunque che $|5| = 5$, $|-3| = -(-3) = 3$ e $|0| = 0$.

Possiamo concludere che $\forall a \in \mathbb{R} \quad |a| \geq 0$.

Nelle righe che seguono cerchiamo di riassumere alcune proprietà del valore assoluto:

Proprietà valori assoluti

a) $|-a| = |a| \quad \forall a \in \mathbb{R}$;

b) $|a|^2 = a^2 \quad \forall a \in \mathbb{R}$;

c) $|a| \cdot |b| = |a \cdot b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$;

d) $\dfrac{|a|}{|b|} = \left|\dfrac{a}{b}\right| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$ con $b \neq 0$;

e) $|a - b| \geq |a| - |b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$;

f) $|a + b| \leq |a| + |b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$.

L'ultima proprietà è conosciuta come *disuguaglianza triangolare* e chi farà studi scientifici la vedrà ovunque!!!

Equazioni semplici con valori assoluti

Può accadere nelle applicazioni di dover svolgere equazioni con valori assoluti, in questa nota voglio riassumerne le relazioni da impostare per la risoluzione degli esercizi.

Caso 1) $\quad |f(x)| = k$

a) Se $k < 0$, allora l'equazione non ammette soluzioni e quindi $S = \emptyset$.

b) Se $k = 0$, allora l'equazione assegnata è equivalente alla seguente: $f(x) = 0$

c) Se $k > 0$, allora l'equazione assegnata è equivalente alla seguente: $f(x) = k \vee f(x) = -k$.

Caso 2) $\quad |f(x)| = g(x)$

Intanto prenderete le soluzioni che soddisfano alla *condizione di concordanza di segno* $g(x) \geq 0$. L'equazione assegnata è equivalente alla seguente: $f(x) = g(x) \vee f(x) = -g(x)$. Mi ripeto purché sia $g(x) \geq 0$.

Caso 3) $\quad |f(x)| = |g(x)|$

L'equazione assegnata è equivalente alla seguente: $f(x) = g(x) \vee f(x) = -g(x)$.

Esercizi con valori assoluti

Esempio 1 *Risolvere la seguente equazione contenente valori assoluti:* $|3x-5| = -3$

Svolgimento

Osservate bene l'equazione assegnata prima di partire in una risoluzione meccanica. In questo caso a primo membro abbiamo una quantità non negativa e il secondo membro è negativo, dunque essendo nel **caso 1a)** non può sussistere un'uguaglianza e quindi l'equazione è impossibile ovvero $S = \emptyset$.

Esempio 2 *Risolvere la seguente equazione contenente valori assoluti:* $|2x+3| = 0$

Svolgimento

Siamo nel **caso 1b)** e quindi abbiamo $2x + 3 = 0 \Longleftrightarrow x = -\dfrac{3}{2}$

Esempio 3 *Risolvere la seguente equazione contenente valori assoluti:* $|1-3x| = 8$

Svolgimento

Questo esercizio è del tipo **Caso 1c)** e quindi si spezza nelle due equazioni in due equazioni:

$1 - 3x = 8 \quad \vee \quad 1 - 3x = -8.$

La prima equazione diventa $3x = -7 \Longrightarrow x = -\dfrac{7}{3}$.

La seconda equazione diventa $3x = 9 \Longrightarrow x = 3$.

In definitiva le soluzioni dell'equazione assegnata sono: $S = \left\{-\dfrac{7}{3}, 3\right\}$.

Esempio 4 *Risolvere la seguente equazione contenente valori assoluti:*

$$|x+1| = 2x+1$$

Svolgimento

Intanto poniamo la condizione di concordanza di segno: $2x + 1 \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq -\dfrac{1}{2}$.

Osserviamo in maniera preliminare che si tratta di un'equazione del tipo **Caso 2**. L'equazione si "spezza" in due equazioni:

$x + 1 = 2x + 1 \quad \vee \quad x + 1 = -2x - 1$

$x = 0 \quad \vee \quad x = -\dfrac{2}{3}$. La soluzione accettabile è solo $x = 0$.

Esempio 5 *Risolvere la seguente equazione contenente valori assoluti:*

$$|x^2 - 3x| = |x^2 - 4x|$$

Svolgimento

Osserviamo in maniera preliminare che si tratta di un'equazione del tipo **Caso 3**. L'equazione si "spezza" in due equazioni:

$$x^2 - 3x = x^2 - 4x \qquad \vee \qquad x^2 - 3x = -x^2 + 4x$$

La prima equazione diventa $x = 0$.
La seconda equazione diventa $2x^2 - 7x = 0 \Longrightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = \frac{7}{2}$.

Possiamo concludere che $S = \left\{0, \frac{7}{2}\right\}$.

Disequazioni semplici con valori assoluti

Vediamo alcune semplici disequazioni che coinvolgono i valori assoluti.

Esempio 6 *La disequazione del tipo $|f(x)| \geq a$ è equivalente:*

a) se $a < 0$ l'equazione ammette come soluzione $S = \mathbb{R}$

b) se $a = 0$ l'equazione ammette come soluzione le radici di $f(x)$

c) se $a > 0$ l'equazione ammette come soluzione l'unione delle soluzioni di $f(x) \leq -a$ con $f(x) \geq a$.

Vediamo alcuni semplici esempi:

a) L'equazione $|x^2 - x| \geq -3$ ammette come soluzioni $S = \mathbb{R}$

b) L'equazione $|x^2 + x - 2| \geq 0$ ammette come soluzioni le radici di $x^2 + x - 2 = 0$ e quindi $S = \{-2, 1\}$

c) L'equazione $|x - 3| > 2$ ammette come soluzione l'unione delle soluzioni di $x - 3 < -2$ con $x - 3 > 2$ e quindi $x < -1 \vee x > 5$.

Vediamo ancora un'altra tipologia fi disequazioni che possono presentarsi nelle applicazioni:

$|f(x)| < g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) > -g(x) \\ f(x) < g(x) \end{cases}$ *. In questo caso si intersecano le soluzioni $S_1 \cap S_2$.*

$|f(x)| > g(x) \Longleftrightarrow f(x) < -g(x) \vee f(x) > g(x)$. *In questo caso si uniscono le soluzioni $S_1 \cup S_2$.*