Alcune relazioni utili in Geometria Analitica

Liceo Assteas -Buccino-

F. Fernicola

17 Ottobre 2023

Baricentro di un triangolo

Presi in un piano cartesiano tre punti non allineati A, B e C (Punti che non si trovano su una stessa retta), sappiamo che essi individuano un triangolo. Si chiama *Baricentro del triangolo* il punto di incontro delle tre mediane. Ci chiediamo, se noi conosciamo le coordinate dei tre vertici $A \equiv (x_1, y_1)$, $B \equiv (x_2, y_2)$ e $C \equiv (x_3, y_3)$ possiamo conoscere le coordinate del baricentro G del triangolo? La risposta è affermativa e in vostro aiuto viene la seguente formula:

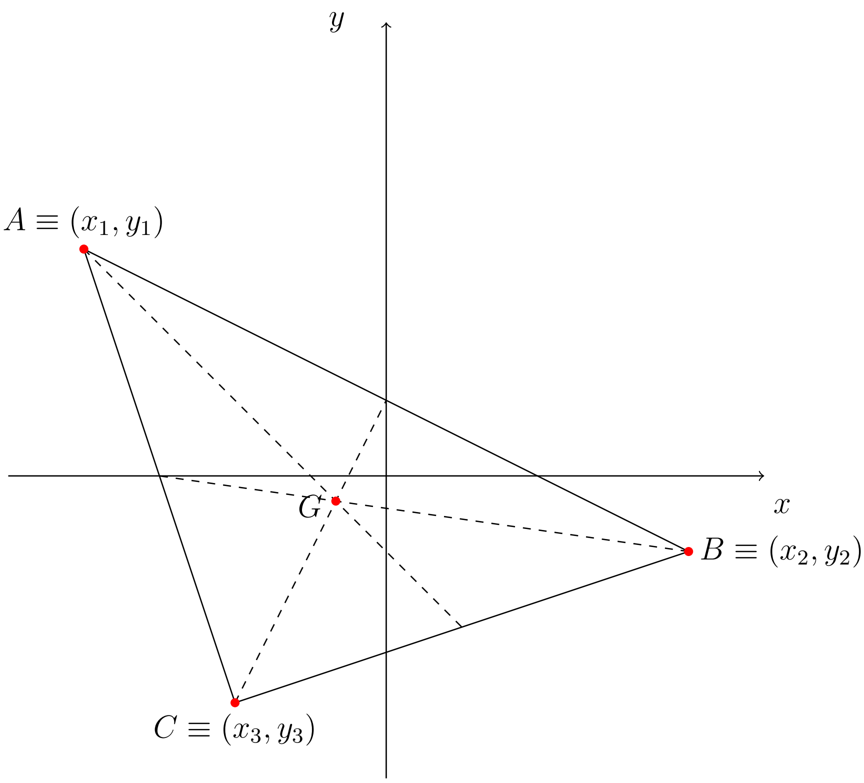

Figura 1: Baricentro G del triangolo

$$G \equiv \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$$

Esempio 1 *In un piano cartesiano i vertici di un triangolo sono* $A \equiv \left(\frac{3}{2}, 1\right)$, $B \equiv \left(\frac{1}{2}, 3\right)$ *e* $C \equiv (4, -7)$. *In questo caso le coordinate del baricentro sono* $G \equiv \left(\frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 4}{3}, \frac{1 + 3 - 7}{3} \right)$, *dunque in forma compatta possiamo dire che* $G \equiv (2, -1)$.

Esercizio 1 *In un piano cartesiano i vertici di un triangolo sono* $A \equiv (5, -1)$, $B \equiv (2, -4)$ *e* $C \equiv (-1, -2)$. *Determinare le coordinate del baricentro* G.

In questa nota presento ulteriori due esercizi che coinvolgono la retta:

Distanza Punto-Retta

Ha senso determinare la distanza di un punto $P \equiv (x_0, y_0)$ dalla retta $r : ax + by + c = 0$. In questo caso la formula è la seguente:

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

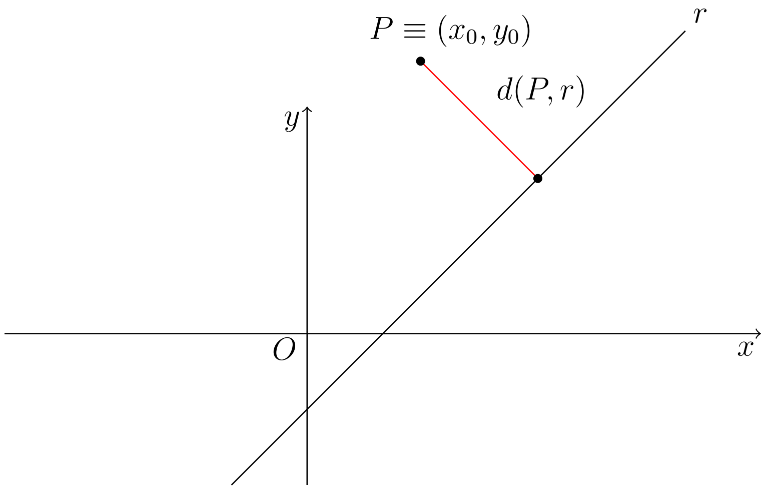

Figura 2: Distanza punto-retta

Esempio 2 *Determinare la distanza del punto* $P \equiv (-2, 3)$ *dalla retta* $r : 3x - 4y + 3 = 0$.

Svolgimento

$$d(P, r) = \frac{|3 \cdot (-2) - 4 \cdot 3 + 3|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-6 - 12 + 3|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{15}{5} = 3 \Longrightarrow d(P, r) = 3$$

Esercizio 2 *Determinare la distanza del punto* $P \equiv (-1, 4)$ *dalla retta* $r : 6x + 8y - 3 = 0$.

Osserviamo che se la retta è scritta in forma esplicita: $y = mx + q$, allora per applicare la formula precedente dobbiamo riportarla in forma implicita e quindi scrivere: $mx - y + q = 0$ e volendo applicare la formula precedente possiamo scrivere:

$$d(P, r) = \frac{|mx_0 - y_0 + q|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

Nulla di spaventoso, sappiamo che $a = m$, $b = -1$ e $c = q$.

Esempio 3 *Determinare la distanza del punto* $P \equiv (3, -2)$ *dalla retta* $r : y = 3x - 1$.

Svolgimento

La retta in forma implicita è $r : 3x - y - 1 = 0$, allora $d(P, r) = \dfrac{|3 \cdot 3 - 1 \cdot (-2) - 1|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}}$

Allora $d(P, r) = \dfrac{10}{\sqrt{10}}$.

Esercizio 3 *Determinare la distanza del punto* $P \equiv (3, -2)$ *dalla retta* $r : y = -2x + 5$.

Asse di un segmento

Spesso si incontrano persone tediose, a scuola ne trovi non poche, che stanno sempre a fare domande e vi chiedono della vita di Manzoni, come trascorreva le giornate Virgilio, cosa faceva Tizio e dove dormiva Sempronio o come si calcola l'equazione dell'asse di un segmento AB. In relazione all'ultima questione vi posso dare dei consigli e perdonatemi per il fastidio arrecato.

Ci sono almeno due strade percorribili:

Strada 1 Assegnato un segmento di estremi $A \equiv (x_1, y_1)$ e $B \equiv (x_2, y_2)$, si vuole determinare l'asse di questo segmento. E' sufficiente determinare la retta passante per il punto medio $M \equiv (x_M, y_M)$ del segmento AB e avente coefficiente angolare $m' = -\dfrac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$. Vi ricordo che la retta passante per A e B ha coefficiente angolare $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, cercando la retta per $M \equiv (x_M, y_M)$ ortogonale al segmento AB dobbiamo prendere come coefficiente angolare $m' = \dfrac{1}{m}$ (devono essere antireciproci i coefficienti angolari) e questo giustifica perchè $m' = -\dfrac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$.

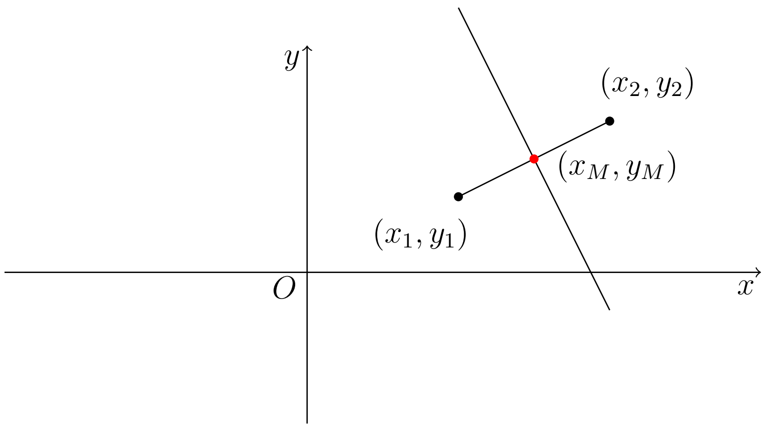

Figura 3: Asse di un segmento

Esempio 4 *Determinare l'equazione dell'asse del segmento di estremi*

$$A \equiv (-4, 2) \text{ e } B \equiv (2, 6).$$

Svolgimento

Le coordinate del punto medio M del segmento AB sono $M \equiv (-1, 4)$. La retta che passa per AB ha coefficiente angolare $m = \dfrac{6-2}{2+4} = \dfrac{2}{3}$. Vado nella dispensa prendo la relazione $y - y_0 = m(x - x_0)$, ho così tutti gli ingredienti per fare la torta di Natale:

$$y - 4 = -\frac{3}{2}(x + 1)$$

$$2y - 8 = -3x - 3$$

Finalmente posso scrivere che l'equazione dell'asse è $3x + 2y - 5 = 0$.

Strada 2 L'asse di un segmento AB può essere visto come *il luogo geometrico* dei punti $P \equiv (x, y)$ (con tale locuzione si intente dire l'insieme dei punti del piano che godono di una determinata proprietà) che godono della proprietà di essere equidistanti dagli estremi del segmento AB. E' sufficiente imporre la seguente condizione:

$$d(P, A) = d(P, B)$$

$$\sqrt{(x+4)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-6)^2}$$

$$x^2 + 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 12y + 36$$

$$8x + 16 - 4y = -4x - 12y + 36$$

$$12x + 8y - 20 = 0$$

Finalmente, dividendo per 4, posso scrivere che l'equazione dell'asse è $3x + 2y - 5 = 0$. Tutte le strade portano a ROMA!!! Lo stesso risultato di prima!!

Esercizio 4 *Determinare l'asse del segmento di estremi* $A \equiv (6, -2)$ *e* $B \equiv (-4, 6)$.

Equazioni delle bisettrici

Se consideriamo due rette r e r' che sono incidenti esse individuano quattro angoli che a coppie sono uguali. A noi, che siamo curiosi, piacerebbe conoscere le equazioni delle bisettrici di questi angoli. Supponiamo che le rette siano scritte in forma implicita e abbiano le seguenti equazioni:

$$r : ax + by + c = 0 \qquad r' : a'x + b'y + c' = 0$$

A tal proposito facciamo un disegno per meglio comprendere la questione:

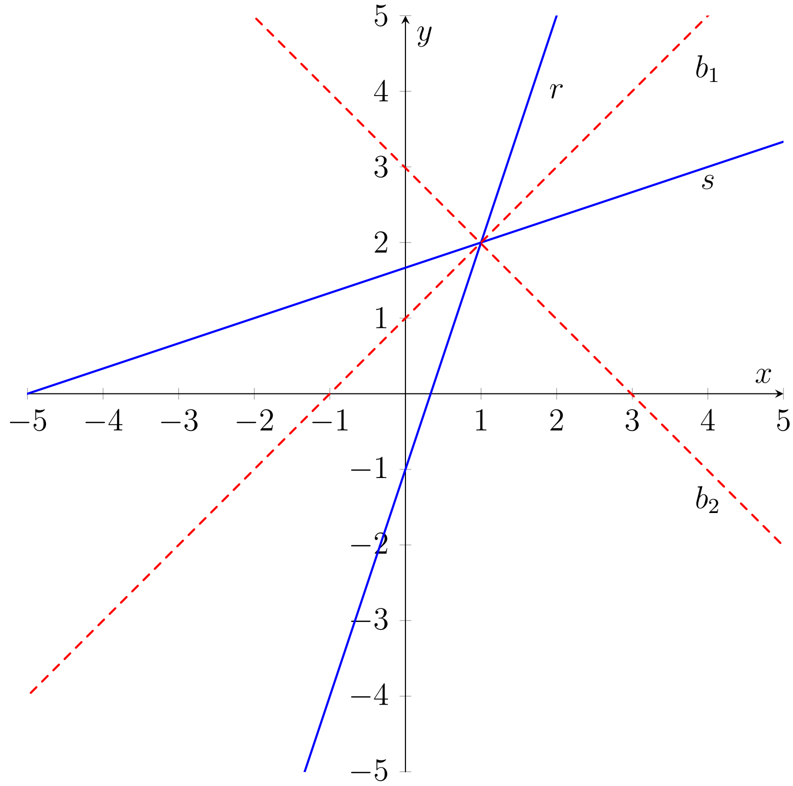

Figura 4: Le bisettrici b_1 e b_2

Non ci sono dubbi che anche le bisettrici b_1 e b_2 sono luoghi geometrici, ovvero sono costituite dai punti del piano $P \equiv (x, y)$ che sono equidistanti dalle rette. Anche in questo caso abbiamo tutti gli ingredienti: le due rette $r : ax + by + c = 0$ e $r' : a'x + b'y + c' = 0$ e il punto $P \equiv (x, y)$, dobbiamo solo impastare impostando la relazione $d(P, r) = d(P, r')$ (RICORDIAMO LA DISTANZA DI UN PUNTO DA UNA RETTA!!!):

$$\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|a'x+b'y+c'|}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$$

L'ultima relazione scritta si può leggermente modificare tenendo conto che $|\alpha|=|\beta| \iff \alpha=\pm\beta$ e quindi scriviamo:

$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\pm\frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$$

Una volta si prende $+$ e si ottiene la bisettrice b_1 e l'altra volta con $-$ si ottiene l'altra bisettrice b_2, beninteso chi sia b_1 o b_2 è irrilevante!!!

Esempio 5 *Determinare l'equazione delle bisettrici individuate dalle rette* $r: 5x-12y+1=0$ *e* $r': 9x+12y-1=0$

Svolgimento

Le due rette sono ovviamente incidenti perché i coefficienti angolari non sono uguali, dunque le rette individuano due coppie di angoli uguali. Le bisettrici si determinano impostando la relazione:

$$\frac{5x-12y+1}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\pm\frac{9x+12y-1}{\sqrt{9^2+12^2}}$$

La bisettrice b_1 sarà: $\dfrac{5x-12y+1}{\sqrt{25+144}}=\dfrac{9x+12y-1}{\sqrt{81+144}} \Longrightarrow \dfrac{5x-12y+1}{13}=\dfrac{9x+12y-1}{15}$ e semplificando si trova: $75x-180y+15=117x+156y-13$ e finalmente

$$b_1: 42x+336y-28=0$$

La bisettrice b_2 sarà: $\dfrac{5x-12y+1}{\sqrt{25+144}}=-\dfrac{9x+12y-1}{\sqrt{81+144}} \Longrightarrow \dfrac{5x-12y+1}{13}=-\dfrac{9x+12y-1}{15}$ e semplificando si trova: $75x-180y+15=-117x-156y+13 \Longrightarrow 192x-24y+2=0$ e finalmente

$$b_2: 96x-12y+1=0$$

Esercizio 5 *Determinare l'equazione delle bisettrici individuate dalle rette* $r: 4x+3y+1=0$ *e* $r': 6x-8y-3=0$

Cambiamento del riferimento: "Traslazione degli assi"

Spesso accade che stiamo utilizzando un sistema di riferimento che indicheremo per convenienza con $S=(O;x,y)$ e per convenienza ci serve introdurre un nuovo sistema di riferimento che possiamo indicare con $S'=(O',X,Y)$. Molte cose che noi conosciamo in S per gusto le vorremmo trasportare con l'astronave di Star Trek nel "Mondo Parallelo" S'.

Ho le coordinate di P in S, quali saranno le coordinate di P nel nuovo riferimento S'?

Ho l'equazione di una retta r, quale sarà l'equazione della retta r in S'?

Ci piacerebbe dunque capire come dobbiamo tradurre in S' i risultati che conosciamo in S, in sostanza dobbiamo costruire un piccolo vocabolario tipo il CASTIGLIONI-MARIOTTI. Vediamo di costruirlo questo vocabolario!!!

La regola è ferrea, si possono costruire tanti mondi paralleli, questa volta supporremmo che i nuovi assi siano paralleli a quelli del nostro mondo. Esistono persone stravaganti che oltre a traslare gli assi possono anche decidere di ruotarli e quindi avremo un altro mondo e quindi bisogna costruire un vocabolario più articolato. Facciamo un disegno per rendere bene l'idea!

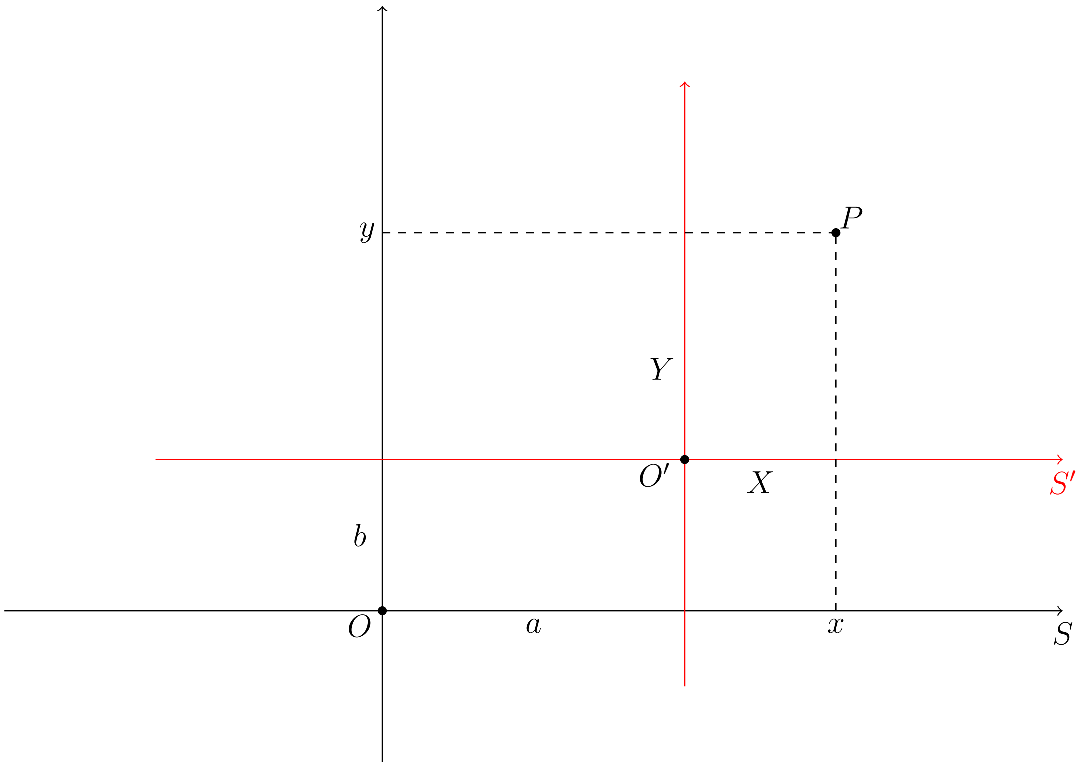

Figura 5: Riferimenti S e S'

Alla luce del disegno fatto, indichiamo con O' l'origine del nuovo sistema di riferimento S' siano (a, b) le coordinate di O' rispetto a S e quindi $O' \equiv (a, b)$. Il punto P ha coordinate (x, y) rispetto al vecchio sistema di riferimento S e ha coordinate (X, Y) rispetto al nuovo sistema di riferimento S'. Non ci sono dubbi dal disegno che valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} x = a + X \\ y = b + Y \end{cases} \qquad \text{(Relazione cambiamento di riferimento)}$$

Quello in alto è il nostro vocabolario, il vocabolario lo riscriviamo in una forma equivalente ma che risulta più comodo da leggere.

$$\begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \end{cases} \tag{1}$$

Vediamo come si applicano le formule precedenti.

Esempio 6 *L'origine del nuovo riferimento ha coordinate $O' \equiv (-3, 2)$, sappiamo che le coordinate di un punto rispetto al vecchio sono $P \equiv (6, 2)$. Quali saranno le coordinate del punto P nel nuovo riferimento?*

Svolgimento

Bisogna solo applicare le formule precedenti:

$$\begin{cases} X = 6 - (-3) = 9 \\ Y = 2 - 2 = 0 \end{cases}$$

Dunque il punto P nel nuovo riferimento S' avrà coordinate $P \equiv (9, 0)$

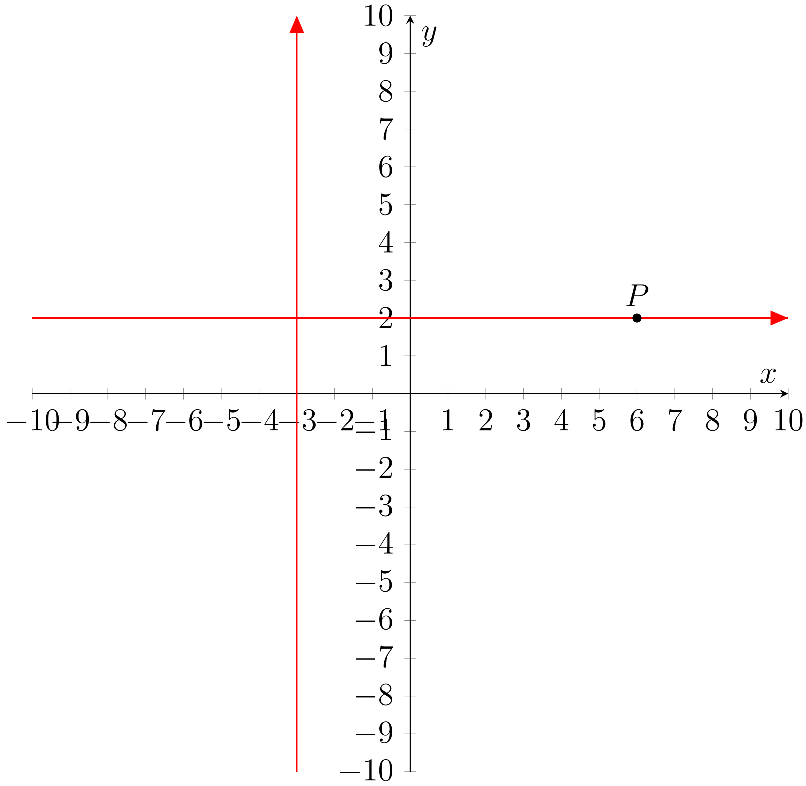

Figura 6: Riferimenti S e S'

Notate come davvero il punto P nel vecchio riferimento S ha coordinate $P \equiv (6, 2)$ e nel nuovo riferimento in rosso S' le sue coordinate siano $P \equiv (9, 0)$.

Esercizio 6 *In un riferimento cartesiano le coordinate di un punto sono $P \equiv (4, -3)$, l'origine del nuovo riferimento ha coordinate $O' \equiv (3, 2)$. Determinare le coordinate del punto P nel nuovo riferimento. Se una retta r nel vecchio riferimento ha equazione $2x - y + 3 = 0$, quale sarà l'equazione della retta nel nuovo riferimento?*