Nota sulle nozioni di base di Geometria Analitica

Liceo Assteas -Buccino-

F. Fernicola 11 Settembre 2024

1 Osservazioni preliminari

Ho la reale convinzione che nel campo del sapere non si può ritenere che una sola mente abbia potuto elaborare una teoria o aver fatto una particolare scoperta. Riguardo all'argomento che stiamo per trattare tutti concordano che René Descartes (CARTESIO) sia stato più di ogni altro l'ideatore di questo metodo e che ha rivestito il ruolo del prete che ha fatto convolare a nozze la "geometria elementare classica" con "l'algebra" e da questo matrimonio nasce nel 1637 la cara e dolce "Geometria Analitica"! Lo stesso Cartesio in una frase asserisce *" Ho applicato l'algebra dei moderni alla geometria degli antichi e ho trovato così i fondamenti di una scienza meravigliosa"*.

2 Ingredienti base

Si considerano due rette ortogonali (si dice anche perpendicolari), su ciascuna di esse si considera un verso di percorrenza, si fissa un'origine che coincide con il punto di intersezione delle rette e si fissa in ultimo un'unità di misura.

Fondamentale l'assunto che i punti di una retta sono in corrispondenza biettiva con i numeri reali, insomma i punti di una retta sono tanti quanti sono i numeri reali. Ogni numero reale lo facciamo accomodare su una sedia e numeri reali distinti siedono su punti distinti e non restano punti non occupati!! Se facciamo un tale lavoro abbiamo costruito un *Sistema di riferimento monometrico ortogonale cartesiano* e ad ogni punto del piano si associa una sola coppia di numeri reali e viceversa:

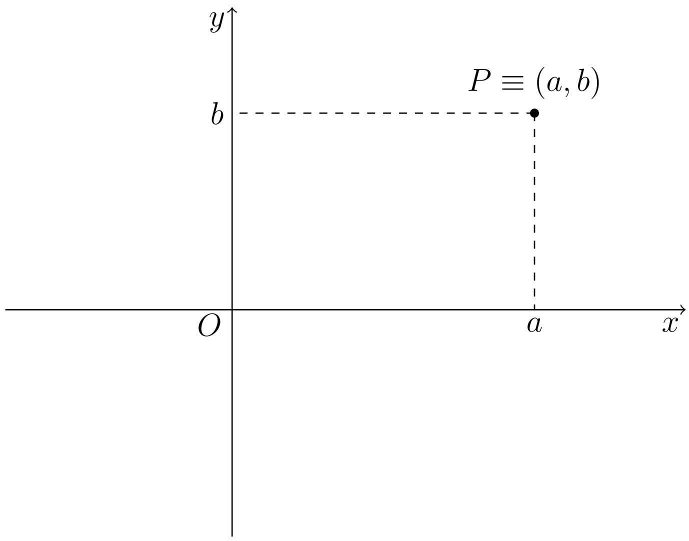

Figura 1: Sistema di riferimento cartesiano

Una delle prime cose che si fa quando si ha a disposizione un *sistema di riferimento* è determinare la distanza tra due punti P e Q di cui conosciamo le relative coordinate. Si prova facilmente, applicando il teorema di Pitagora, la seguente relazione:

Osservazione 1 ***DISTANZA TRA DUE PUNTI***

$$P \equiv (x_1, y_1) \text{ e } Q \equiv (x_2, y_2) \Longrightarrow d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

La successiva relazione e invece conseguenza del teorema di Talete:

Osservazione 2 ***PUNTO MEDIO DI UN SEGMENTO***

$$P \equiv (x_1, y_1) \text{ e } Q \equiv (x_2, y_2) \Longrightarrow M \equiv \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Osservazione 3 ***COORDINATE BARICENTRO DI UN TRIANGOLO***

Assegnati tre punti A, B e C di un piano cartesiano che non sono allineati, essi individuano una triangolo. Le tre mediane (sono segmenti che congiungono ciascun vertice con il lato opposto) passano tutte per uno stesso punto G che viene dette baricentro. *Come si determinano le coordinate del baricentro se noi conosciamo le coordinate dei tre vertici? Si utlizza la seguente relazione:*

$$A \equiv (x_1, y_1); \quad B \equiv (x_2, y_2); \quad C \equiv (x_3, y_3) \quad \Longrightarrow G \equiv \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$$

3 Equazioni lineari non degeneri e relative soluzioni

La seguente relazione:

$$ax + by + c = 0$$

si dice un'equazione lineare in due variabili *non degenere* (o equazione di primo grado in due variabili *non degenere*) se accade che $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ oppure $b \neq 0$. Sono esempi di equazioni lineari in due variabili non degeneri le seguenti:

$$-3x + 2y - 1 = 0; \quad x - 4y = 0; \quad 2x + 1 = 0; \quad -5x + 3 = 0; \quad -3x = 0; \quad 2y = 0$$

Quelle che ho scritto in alto sono tutte e sole le equazioni lineari in due variabili non degeneri a meno dei coefficienti utilizzati, una qualsiasi altra equazione ricade nei casi precedenti scritti!

Osservazione 4 *Evidente che quando scrivo $-5x + 3 = 0$ vuol dire aver scritto l'equazione $-5x + 0y + 3 = 0$ e allo stesso dicasi per le altre dove non compare una delle due variabili. Insomma se non compare la variabile vuol dire che il relativo coefficiente è 0.*

Definizione 1 *Assegnata l'equazione $ax + by + c = 0$, si dice soluzione o radice di una tale equazione una qualunque coppia (x_0, y_0) tale che $ax_0 + by_0 + c = 0$.*

Esempio 1 *Assegnata l'equazione $3x - 2y + 1 = 0$, la coppia $(4, 1)$ non è soluzione dell'equazione $3x - 2y + 1 = 0$ perchè $3 \cdot 4 - 2 \cdot 1 + 1 = 11 \neq 0$. Al contrario la coppia $(1, 2)$ è soluzione dell'equazione $3x - 2y + 1 = 0$ perchè $3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 1 = 0$ e dunque verifica la relazione. Al posto di x bisogna sostituire l'ascissa e al posto di y l'ordinata del punto.*

Mettiamo subito in chiaro una questione:

Quante soluzioni ammette un'equazione lineare non degenere in due variabili? La risposta è secca, ammette infinite soluzioni!!!

Vediamo un pochino come si determinano queste care soluzioni!!

Esempio 2 *Consideriamo l'equazione* $3x-2y+2=0$ *e vogliamo determinare le sue soluzioni. Si procede nel seguente modo:*

- *Si decide di assegnare ad* x *o* y *il ruolo di variabile libera, questione di gusto e certe volte di convenienza, in ogni caso siete liberi!*
- *Una volta decisa la variabile libera si etichetta con un pedice e si considera come se fosse un numero.*
- *L'equazione assegnata diventa di primo grado e la risolvete come siete abituati ad operare.*

Nel caso caso dell'equazione scritta in alto decido di assegnare il ruolo di variabile libera ad y *e quindi scrivo l'equazione:*

$$3x-2y_0+2=0 \Longrightarrow 3x=2y_0-2 \Longrightarrow x=\frac{2y_0-2}{3}$$

A questo punto posso dire che le soluzioni sono descritte dall'insieme:

$$S=\left\{\left(\frac{2y_0-2}{3},y_0\right) \mid \quad y_0\in\mathbb{R}\right\}$$

Esempio 3 *Consideriamo l'equazione* $-4x+1=0$ *e vogliamo determinare le sue soluzioni. Si procede nel seguente modo:*

- *Siamo costretti ad assegnare il ruolo di variabile libera a* y*! Ricordate che l'equazione è* $-4x+0y+1=0$

Nel caso caso dell'equazione scritta le cose sono ancora più semplici:

$$-4x+1=0 \Longrightarrow -4x=-1 \Longrightarrow x=\frac{1}{4}$$

A questo punto posso dire che le soluzioni sono descritte dall'insieme:

$$S=\left\{\left(\frac{1}{4},y_0\right) \mid \quad y_0\in\mathbb{R}\right\}$$

Esercizio 1 *Determinare le soluzioni delle seguenti equazioni:*

$$-2x+3y-3=0; \quad 4x-y=0; \quad 3x-2=0; \quad -3y+4=0; \quad -4x=0; \quad 3y=0$$

4 Equazioni non degeneri e retta nel piano cartesiano

Come dicevamo anche in precedenza l'equazione del tipo $ax+by+c=0$ con $a,b,c\in\mathbb{R}$ si dice *non degenere* se $a\neq 0 \vee b\neq 0$. Insomma l'equazione è non degenere se almeno uno dei due numeri a o b sono non nulli.

Sono esempi di equazioni lineari non degeneri le seguenti:

$$3x-2y+3=0; \quad 4x-2y=0; \quad 2y-1=0; \quad 4x+3=0; \quad x=0; \quad y=0$$

Per contro le equazioni che seguono sono degeneri:

$$0x + 0y + 2 = 0; \quad 0x + 0y + 0 = 0$$

Le equazioni degeneri a noi non servono e le buttiamo a mare, perché nel caso di equazioni del tipo $0x + 0y + c = 0$ con $c \neq 0$ esse non ammettono soluzioni del tipo (x_0, y_0) e quindi esse non rappresentano nessun punto nel piano cartesiano e quindi sono una schifezza!!!

Nel caso di equazioni del tipo $0x + 0y + 0 = 0$, esse ammettono tutte le soluzioni (x_0, y_0) e quindi esse rappresentano tutti i punti del piano cartesiano e quindi sono una schifezza lo stesso!!!

La matematica riflette la vita reale, non ci piace il nulla e il tutto!!!

Perché sono interessanti le equazioni non degeneri $ax + by + c = 0$? Lo sono perché le soluzioni di tali equazioni se si rappresentano in un piano cartesiano si dispongono su una retta!!!

Quindi possiamo dire utilizzando un linguaggio espressivo che **ad ogni equazione lineare non degenere del tipo $ax + by + c = 0$ è possibile associare una retta nel piano cartesiano.**

Osservazione 5 *Per brevità quando dirò equazione mi riferisco ad un'equazione lineare non degenere in due variabili.*

Si può dimostrare che l'insieme delle soluzioni di un'equazione $ax + by + c = 0$ individuano una retta nel piano cartesiano. Vi ricordo che un soluzione dell'equazione $ax + by + c = 0$ è una coppia ordinata (x_0, y_0) tale che $ax_0 + by_0 + c = 0$.

Le rette nel piano cartesiano si possono distinguere in:

- Rette oblique $\longrightarrow a \neq 0 \wedge b \neq 0 \longrightarrow ax + by + c = 0$
- Rette orizzontali $\longrightarrow a = 0 \longrightarrow by + c = 0$
- Rette verticali $\longrightarrow b = 0 \longrightarrow ax + c = 0$

Esempio 4 *Rappresentano rette oblique nel piano cartesiano le seguenti equazioni:*

$$3x - 2y + 1 = 0 \quad 5x + y - 3 = 0 \quad 2x + y = 0 \quad x - 3y = 0$$

Esempio 5 *Rappresentano rette orizzontali nel piano cartesiano le seguenti equazioni:*

$$3y + 1 = 0 \quad -5y + 2 = 0 \quad 2y = 0$$

Esempio 6 *Rappresentano rette verticali nel piano cartesiano le seguenti equazioni:*

$$2x + 1 = 0 \quad 3x - 2 = 0 \quad 3x = 0$$

Osservazione 6 *Due equazioni rappresentano la stessa retta se differiscono per un fattore moltiplicativo non nullo.*

$4x - 2y + 6 = 0$ *e* $2x - y + 3 = 0$ *rappresentano la stessa retta: retta obliqua.*

$4y + 8 = 0$ *e* $y + 2 = 0$ *rappresentano la stessa retta: retta orizzontale.*

$-7x = 0$ *e* $x = 0$ *rappresentano la stessa retta: asse delle ordinate.*

$4y = 0$ *e* $y = 0$ *rappresentano la stessa retta: asse delle ascisse .*

In maniera brutale se vi accorgete che in un'equazione il M.C.D. tra i coefficienti è maggiore di 1, allora dividete tutti i coefficienti per il M.C.D. e avrete la vostra equazione pulita e alleggerita!

Ora voi sapete guardare negli occhi delle equazioni e solo guardandole capirete che tipo di retta è nel piano cartesiano. Ma come si rappresenta una retta nel piano cartesiano? Sappiamo dalla Geometria Euclidea che per due punti distinti passa una e una sola retta, dunque per rappresentarla nel piano cartesiano è sufficiente determinare due sue soluzioni. Vediamo come si procede:

Esempio 7 *Rappresentare la retta di equazione* $3x - 2y + 1 = 0$.
Sarà una retta obliqua, devo assegnare a piacere un valore ad una delle due variabile x *o* y*, certe volte una scelta azzeccata ci fa risparmiare lavoro. In questo caso assegno a* $y = -1$ *(sono FURBO!), si ha* $3x = -3$ *e quindi* $x = -1$*. Avrò la coppia* $A \equiv (-1, -1)$*. Ancora un altro giro....., questa volta assegno a* $x = 1$ *(sono FURBO!), si ha* $2y = 4$ *e quindi* $y = 2$*. Avrò la coppia* $B \equiv (1, 2)$

x	y
-1	-1
1	2

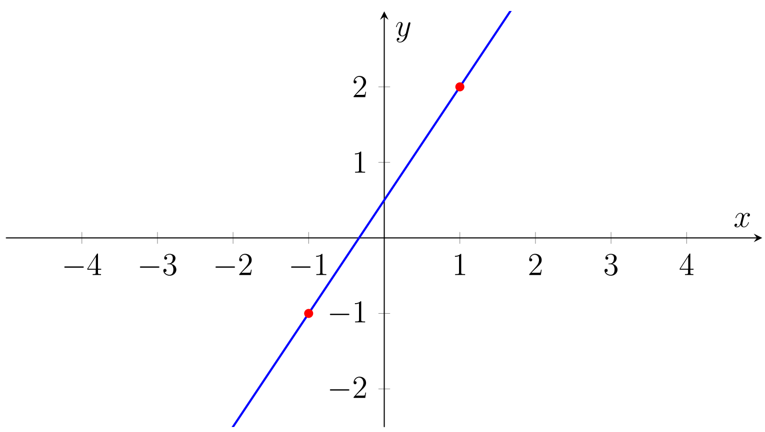

Figura 2: Rappresentazione della retta $3x - 2y + 1 = 0$

Esempio 8 *Rappresentare la retta di equazione* $2x + 3y = 0$.
Sarà una retta obliqua passante per l'origine perchè $c = 0$*, devo assegnare assegnare a piacere un valore ad una delle due variabile* x *o* y*, certe volte una scelta azzeccata ci fa risparmiare lavoro. In questo caso assegno a* $x = 0$ *(sono FURBISSIMO!), si ha* $3y = 0$ *e quindi* $y = 0$*. Avrò la coppia* $O \equiv (0, 0)$*. Ancora un altro giro....., questa volta assegno a* $y = 2$ *(sono FURBO!), si ha* $2x = -6$ *e quindi* $x = -3$*. Avrò la coppia* $B \equiv (-3, 2)$*.*

x	y
0	0
-3	2

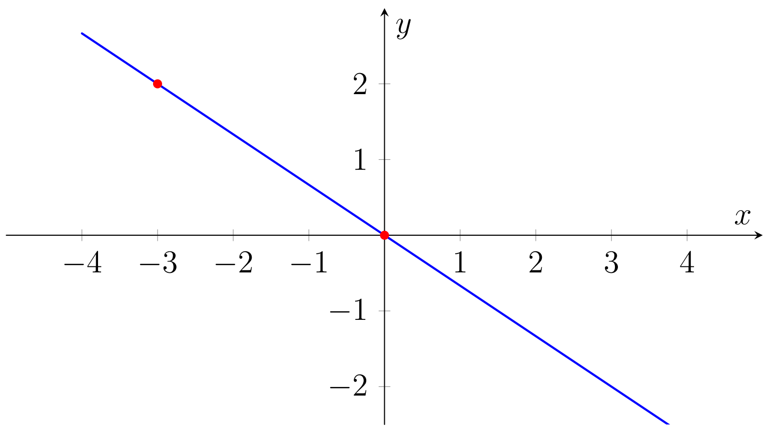

Figura 3: Rappresentazione della retta $2x + 3y = 0$

Esempio 9 *Rappresentare la retta di equazione* $2x - 3 = 0$.

Sarà una retta verticale, in questo caso non faccio nessun sforzo perchè $x = \dfrac{3}{2}$ *e* y *prendo una volta* 0 *e l'altra volta* 1 *e quindi ho i punti* $A \equiv \left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$ *e* $B \equiv \left(\dfrac{3}{2}, 1\right)$.

x	y
$\dfrac{3}{2}$	0
$\dfrac{3}{2}$	1

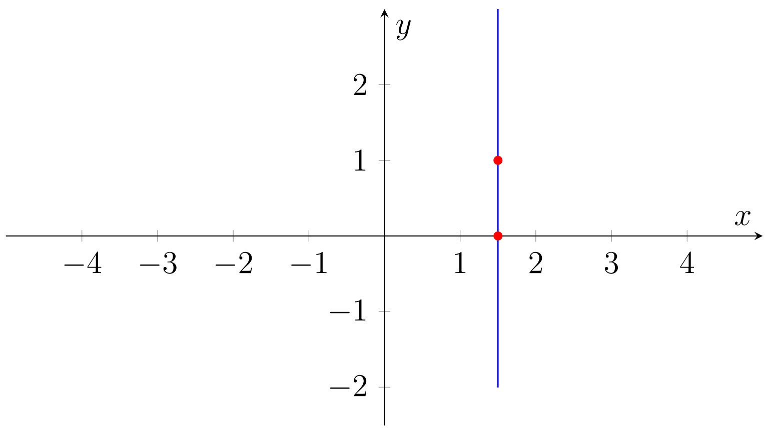

Figura 4: Rappresentazione della retta $2x - 3 = 0$

Esempio 10 *Rappresentare la retta di equazione* $-4y + 2 = 0$. *In questo caso considero* $2y - 1 = 0$ *Sarà una retta orizzontale, in questo caso non faccio nessun sforzo perchè* $y = \dfrac{1}{2}$ *e* x *prendo una volta* 0 *e l'altra volta* 1 *e quindi ho i punti* $A \equiv \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ *e* $B \equiv \left(1, \dfrac{1}{2}\right)$.

x	y
0	$\dfrac{1}{2}$
1	$\dfrac{1}{2}$

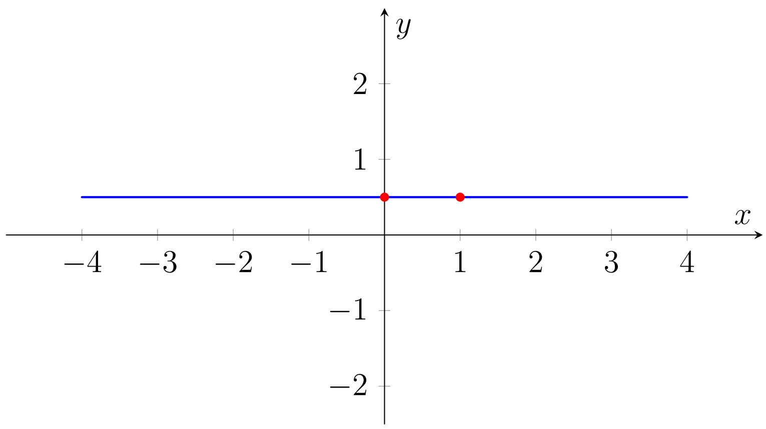

Figura 5: Rappresentazione della retta $2y - 1 = 0$

Mi vergogno di chiedere cosa rappresentano nel piano cartesiano le equazioni: $-3x = 0$, $-2y = 0$, $x = 0$ e $y = 0$.

Esercizio 2 *Rappresentare nel piano cartesiano le seguenti equazioni:*

$$5x - 2y - 3 = 0; \quad 3x + y = 0; \quad 2x + 2 = 0; \quad 4y + 9 = 0; \quad 5x = 0; \quad -2y = 0$$

5 Dai punti assegnati all'equazione della retta

Nei paragrafi precedenti abbiamo imparato solo guardando negli occhi delle equazioni che tipologia di retta individuano le relative equazioni e come si rappresentano le equazioni assegnate. Ora in questo paragrafo vogliamo cambiare il punto di vista e svolgere l'esercizio inverso. Assegnati le coordinate di due punti distinti A e B vogliamo risalire all'equazione della retta.

Esercizio 3 *Scrivere l'equazione della retta passante per i seguenti punti distinti:*

$$P \equiv (x_1, y_1) \text{ e } Q \equiv (x_2, y_2)$$

Svolgimento

Intanto dobbiamo premettere che essendo i punti distinti, si possono presentare tre casi:

CASO A) Sia $x_1 = x_2$ e $y_1 \neq y_2$, allora la retta sarà verticale e la sua equazione si scrive velocemente: $x = x_1$ oppure $x - x_1 = 0$.

Esempio 11 *Scrivere l'equazione della retta passante per i seguenti punti distinti:*

$$P \equiv (2, -4) \text{ e } Q \equiv (2, 3)$$

Svolgimento

La retta ha equazione $x - 2 = 0$ ed è una retta verticale.

CASO B) Sia $x_1 \neq x_2$ e $y_1 = y_2$, allora la retta sarà orizzontale e la sua equazione si scrive velocemente: $y = y_1$ oppure $y - y_1 = 0$.

Esempio 12 *Scrivere l'equazione della retta passante per i seguenti punti distinti:*

$$P \equiv (4, -3) \text{ e } Q \equiv (-4, -3)$$

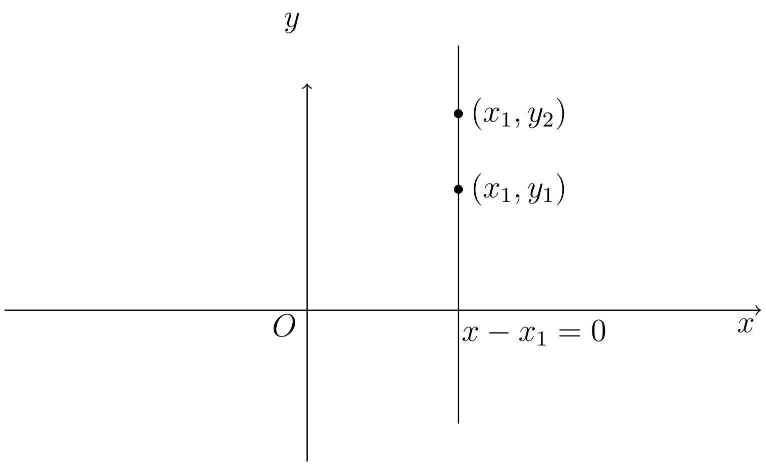

Figura 6: Retta verticale di equazione $x - x_1 = 0$

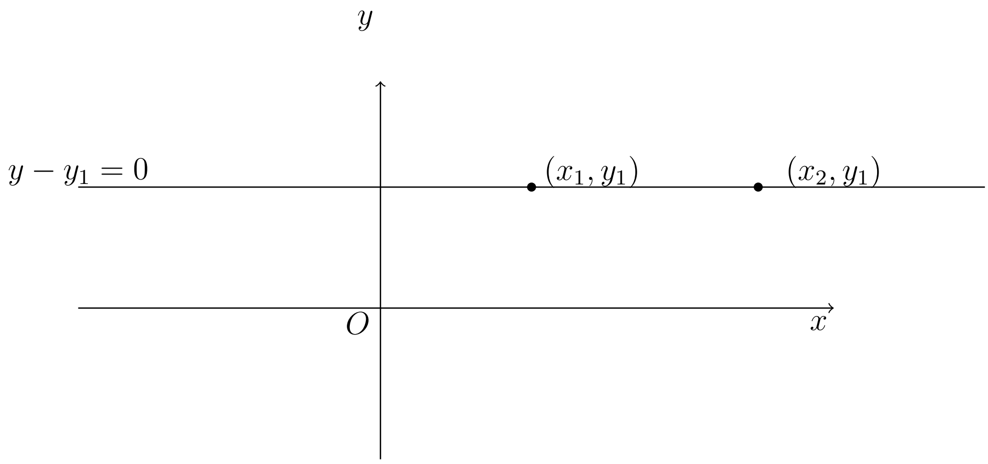

Figura 7: Retta orizzontale di equazione $y - y_1 = 0$

Svolgimento

La retta ha equazione $y + 3 = 0$ ed è una retta orizzontale.

CASO C) Sia $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$, allora la retta sarà obliqua e la sua equazione si scrive utilizzando la seguente relazione (CASO PIU' SPINOSO):

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

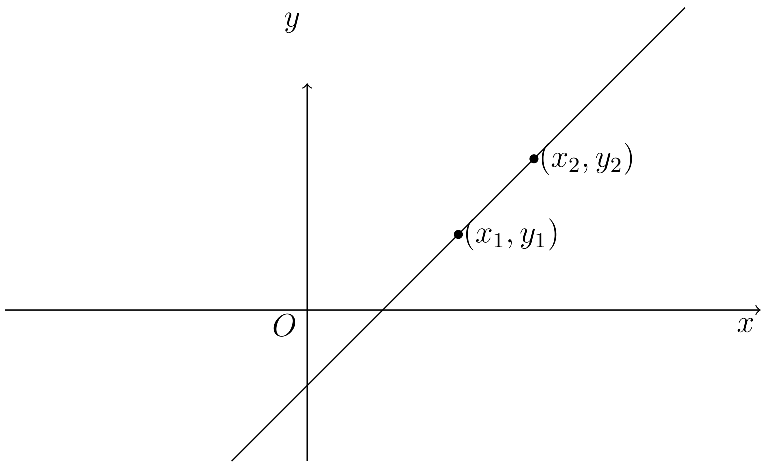

Figura 8: Retta obliqua

Esempio 13 *Scrivere l'equazione della retta passante per i seguenti punti distinti:*

$$P \equiv (2, -3) \ e \ Q \equiv (4, 2)$$

Svolgimento

Utilizzo la relazione che ho menzionato: $\dfrac{x-2}{4-2} = \dfrac{y+3}{2+3} \Longrightarrow \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+3}{5} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow 5x - 10 = 2y + 6 \Longrightarrow 5x - 2y - 16 = 0$. Un rapido controllo come vi ho insegnato ci permette di dire che l'equazione trovata è quella giusta!!! **Il controllo consiste nel sostituire le coordinate dei punti al posto di x e y e constatare che la relazione è verificata. Se i controlli sono fatti bene poi ci potete scommettere qualsiasi somma sopra!!!!**.

Ora tocca a voi.....

Esercizio 4 *Scrivere l'equazione della retta per le seguenti coppie di punti:*

1. $A \equiv (5, 3)$ *e* $B \equiv (5, 7)$
2. $A \equiv (4, -6)$ *e* $B \equiv (3, -6)$
3. $A \equiv (-3, 4)$ *e* $B \equiv (4, -1)$
4. $A \equiv \left(-\dfrac{3}{2}, -1\right)$ *e* $B \equiv \left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{2}{5}\right)$
5. $A \equiv \left(\dfrac{5}{2}, -\dfrac{3}{4}\right)$ *e* $B \equiv \left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{3}{4}\right)$
6. $A \equiv \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{3}{5}\right)$ *e* $B \equiv \left(\dfrac{2}{5}, -\dfrac{1}{4}\right)$