Disequazioni esponenziali e logaritmiche elementari

Liceo Assteas -Buccino-

F. Fernicola

24 Settembre 2024

1 Disequazioni esponenziali

Osservazione 1 *In questo breve paragrafo metteremo in evidenza alcune particolari disequazioni esponenziali e riporteremo alcuni esempi di risoluzione.*

Sono esempi di disequazioni esponenziali le seguenti:

$$(a) \quad 2^{3x-1} \geq 4, \qquad (b) \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{2x+5} > 9,$$

$$(c) \quad 4^{2x-1} \leq 2, \qquad (d) \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{-3x+2} < \frac{9}{4}$$

Risolvere le disequazioni esponenziali precedenti è abbastanza semplice, è sufficiente applicare il *logaritmo* ad ambo i membri con una semplice attenzione:

- Se la base del logaritmo è maggiore di 1 si lascia lo stesso verso.
- Se la base del logaritmo è compresa tra 0 e 1 si cambia il verso.

Nei vari passaggi bisogna applicare anche alcune semplici proprietà dei logaritmi.

Vogliamo risolvere la disequazione esponenziale $(a) \quad 2^{3x-1} \geq 4$.

Applichiamo "$\log_2$" ad ambo i membri e lasciamo lo stesso verso (la base è maggiore di 1), dunque:

$$\log_2 2^{3x-1} \geq \log_2 4 \Longrightarrow 3x-1 \geq 2 \Longrightarrow 3x \geq 3 \Longrightarrow x \geq 1$$

Se la soluzione della disequazione esponenziale la vogliamo scrivere con il simbolismo degli intervalli scriveremo: $S = [1, +\infty)$.

Vogliamo risolvere la disequazione esponenziale $(b) \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{2x+5} > 9$.

Applichiamo "$\log_{\frac{1}{3}}$" ad ambo i membri e cambiamo verso (la base è compresa tra 0 e 1), dunque:

$$\log_{\frac{1}{3}} \left(\tfrac{1}{3}\right)^{2x+5} < \log_{\frac{1}{3}} 9 \Longrightarrow 2x+5 < \log_{\frac{1}{3}} 9 \Longrightarrow 2x+5 < -\log_3 9 \Longrightarrow 2x+5 < -2$$
$$\Longrightarrow 2x < -7 \Longrightarrow x < -\frac{7}{2}$$

Se la soluzione della disequazione esponenziale la vogliamo scrivere con il simbolismo degli intervalli scriveremo: $S = \left(-\infty, -\frac{7}{2}\right)$.

Vogliamo risolvere la disequazione esponenziale $(c) \quad 4^{2x-1} \leq 2$.

Applichiamo "$\log_4$" ad ambo i membri e lasciamo lo stesso verso (la base è maggiore di 1), dunque:

$$\log_4 4^{2x-1} \leq \log_4 2 \Longrightarrow 2x-1 \leq \frac{1}{\log_2 4} \Longrightarrow 2x-1 \leq \frac{1}{2} \Longrightarrow 4x-2 \leq 1 \Longrightarrow 4x \leq 3 \Longrightarrow x \leq \frac{3}{4}$$

Se la soluzione della disequazione esponenziale la vogliamo scrivere con il simbolismo degli intervalli scriveremo: $S = \left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$.

Vogliamo risolvere la disequazione esponenziale (d) $\quad \left(\frac{2}{3}\right)^{-3x+2} < \frac{9}{4}$.

Applichiamo "$\log_{\frac{2}{3}}$" ad ambo i membri e cambiamo verso (la base è compresa tra 0 e 1), dunque:

$$\log_{\frac{2}{3}} \left(\tfrac{2}{3}\right)^{-3x+2} > \log_{\frac{2}{3}} \tfrac{9}{4} \Longrightarrow -3x+2 > -\log_{\frac{2}{3}} \tfrac{4}{9} \Longrightarrow -3x+2 > -2 \Longrightarrow -3x > -4 \Longrightarrow x < \frac{4}{3}$$

Se la soluzione della disequazione esponenziale la vogliamo scrivere con il simbolismo degli intervalli scriveremo: $S = \left(-\infty, \frac{4}{3}\right)$.

Esercizio 1

Risolvere le seguenti disequazioni esponenziali:

a) $5^{-5x+3} \geq \frac{1}{25}$ $\qquad$ *b)* $\left(\frac{3}{4}\right)^{4x-5} < \frac{4}{3}$ $\qquad$ *c)* $\left(\frac{3}{2}\right)^{6x+1} > \frac{8}{27}$ $\qquad$ *d)* $4^{\frac{-x+2}{3}} \leq \frac{1}{2}$

2 Disequazioni logaritmiche

Osservazione 2 *In questo breve paragrafo metteremo in evidenza alcune particolari disequazioni logaritmiche e riporteremo alcuni esempi di risoluzione.*

Sono esempi di disequazioni esponenziali le seguenti:

$$(a) \quad log_2(3x-1) \geq 4, \qquad (b) \quad log_{\frac{1}{3}}(2x+5) > -1,$$

$$(c) \quad log_3(2x-1) \leq 2, \qquad (d) \quad log_{\frac{2}{3}}(-3x+2) < 2$$

Risolvere le disequazioni logaritmiche precedenti è abbastanza semplice, è sufficiente tenere conto della relazione $\log_a b = c \Longleftrightarrow b = a^c$ e delle regole:

- Se la base del logaritmo è maggiore di 1 si lascia lo stesso verso.
- Se la base del logaritmo è compresa tra 0 e 1 si cambia il verso.

Vogliamo risolvere la disequazione logaritmica (a) $\quad log_2(3x-1) \geq 4$.

Lasciamo lo stesso verso (la base è maggiore di 1), dunque:

$$3x-1 \geq 2^4 \Longrightarrow 3x-1 \geq 16 \Longrightarrow 3x \geq 17 \Longrightarrow x \geq \frac{17}{3}$$

Se la soluzione della disequazione logaritmica la vogliamo scrivere con il simbolismo degli intervalli scriveremo: $S = \left[\frac{17}{3}, +\infty\right)$.

Vogliamo risolvere la disequazione logaritmica (b) $\quad log_{\frac{1}{3}}(2x+5) > -1$.

Cambiamo il verso (la base è compresa tra 0 e 1), dunque:

$$2x+5<\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \Longrightarrow 2x+5<\left(\tfrac{1}{3}\right)^{-1} \Longrightarrow 2x+5<3.$$

Questa volta però bisogna imporre anche la condizione $2x+5>0$ e quindi scriviamo:

$$\begin{cases} 2x+5<3 \\ 2x+5>0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x<-2 \\ 2x>-5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x<-1 \\ x>-\frac{5}{2} \end{cases}$$

Se la soluzione della disequazione logaritmica la vogliamo scrivere con il simbolismo degli intervalli scriveremo: $S=\left[-\frac{5}{2},-1\right]$.

<u>Vogliamo risolvere la disequazione logaritmica (c) $\quad log_3(2x-1)\leq 2$.</u>

Lasciamo lo stesso verso (la base è maggiore di 1), dunque:

$$2x-1\geq 3^2 \Longrightarrow 2x-1\geq 9$$

Questa volta però bisogna imporre anche la condizione $2x-1>0$ e quindi scriviamo:

$$\begin{cases} 2x-1<9 \\ 2x-1>0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x<10 \\ 2x>1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x<5 \\ x>\frac{1}{2} \end{cases}$$

Se la soluzione della disequazione logaritmica la vogliamo scrivere con il simbolismo degli intervalli scriveremo: $S=\left(\frac{1}{2},5\right)$.

<u>Vogliamo risolvere la disequazione logaritmica (d) $\quad log_{\frac{2}{3}}(-3x+2)<2$.</u>

Cambiamo il verso (la base è compresa tra 0 e 1), dunque:

$$-3x+2>\left(\tfrac{2}{3}\right)^2 \Longrightarrow -3x+2>\tfrac{4}{9} \Longrightarrow -27x+18>4 \Longrightarrow -27x>-14 \Longrightarrow x<\tfrac{14}{27}$$

Se la soluzione della disequazione logaritmica la vogliamo scrivere con il simbolismo degli intervalli scriveremo: $S=\left(-\infty,\frac{14}{27}\right)$.

Esercizio 2

Risolvere le seguenti disequazioni logaritmiche:

a) $\log_3(-5x+3)\geq 2$

b) $\log_{\frac{3}{4}}(4x-5)<-1$

c) $\log_{\frac{3}{2}}(6x+1)>1$

d) $\log_4\left(\frac{-x+2}{3}\right)\leq\dfrac{1}{2}$