Nozioni di base sulle radici di un polinomio

Liceo Assteas -Buccino-

F. Fernicola 5 Marzo 2024

Supponiamo che ci venga chiesto di determinare il resto della divisione del polinomio $p(x)$ per il binomio divisore $x - \alpha$. Noi sappiamo che il resto $R(x)$ è una costante perché deve avere grado minore del grado di $x - \alpha$. Per conoscere il resto non è necessario eseguire la divisione perchè c'è una proposizione che recita quanto segue:

Proposizione 1 *La divisione tra il polinomio $p(x)$ e il binomio $x - \alpha$ ha come resto $R = p(\alpha)$.*

Proof. Sappiamo che $p(x) = q(x) \cdot (x - \alpha) + R$, allora

$$p(\alpha) = q(\alpha) \cdot (\alpha - \alpha) + R \Longrightarrow p(\alpha) = q(\alpha) \cdot 0 + R \Longrightarrow p(\alpha) = R.$$

■

Questa proposizione ci libera da ogni problema e ci dice una cosa importante: vuoi conoscere il resto della divisione? Non eseguire la divisione è sufficiente calcolare $p(\alpha)$ e avrai che $R = p(\alpha)$.

Supponiamo che si voglia conoscere la divisione tra il polinomio $p(x) = -2x^3 + 3x^2 + 3x - 5$ per il binomio divisore $x - 2$ e si ignora del tutto la proposizione precedente allora si procederà in questo modo:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & -2 & 3 & 3 & -5 \\ 2 & & -4 & -2 & 2 \\ \hline & -2 & -1 & 1 & -3 \end{array}$$

A questo punto si dirà che $R(x) = -3$. Chi conosce il contenuto della proposizione precedente calcolerà facilmente $p(2) = -16 + 12 + 6 - 5 = -3$ e dirà $R = p(2) = -3$ in pochissimo tempo.

Una conseguenza immediata della proposizione precedente è il seguente:

Corollario 2 *Se $p(x)$ è un polinomio, esso è divisibile per $x - \alpha$ se e solo se $p(\alpha) = 0$.*

Proof. Supponiamo che $p(x)$ sia divisibile per $x - \alpha$, allora $p(x) = q(x) \cdot (x - \alpha)$ e quindi $p(\alpha) = q(\alpha) \cdot (\alpha - \alpha)$ e quindi $p(\alpha) = 0$.

Viceversa se $p(\alpha) = 0$, essendo $R = p(\alpha)$, allora $R = 0$ e quindi il polinomio $p(x)$ è divisibile per $x - \alpha$. ■

Dal corollario precedente si comprende l'importanza della ricerca delle radici di un polinomio $p(x)$, la conoscenza di una radice α ci permetterà di scrivere $p(x) = (x - \alpha)q(x)$. Data l'importanza delle radici di un polinomio per la fattorizzazione dello stesso enunciamo la seguente:

Proposizione 3 *Supponiamo che* $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ *sia un polinomio di grado* n *e quindi* $a_n \neq 0$ *e i coefficienti* $a_i \in \mathbb{Z}$*, allora se* $\alpha = \dfrac{a}{b}$ *è una radice di tale polinomio deve accadere che* a *sia divisore di* a_0 *e* b *sia divisore di* a_n*.*

La proposizione precedente è molto importante perché ci permette di dire quali possono essere le potenziali radici razionali di un polinomio a coefficienti interi.

Esempio 4 *Dire quali numeri razionali sono candidati a radice del polinomio*

$$p(x) = 2x^3 + 3x^2 - x - 3$$

Considero i divisori del termine noto: $D(-3) = \{\pm 1, \pm 3\}$

Considero i divisori del parametro direttore: $D(2) = \{\pm 1, \pm 2\}$

A questo punto costruisco tutte le possibile frazioni del tipo: $\dfrac{D(-3)}{D(2)}$ e quindi

(Potenziali radici razionali) $R_p = \left\{\pm 1, \pm\dfrac{1}{2}, \pm 3, \pm\dfrac{3}{2}\right\}$.

Con tanta pazienza e facendosi guidare dall'intuito bisogna provare ciascuno dei valori dell'insieme R_p, di sicuro un numero razionale $\alpha \notin R_p$ non è una radice del polinomio preso in considerazione.

Corollario 5 *Se il polinomio* $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ *è monico, allora una radice razionale è necessariamente un numero intero ed è da ricercare tra i divisori del termine noto* a_0*.*

Esempio 6 *Dire quali possono essere le radici razionali del polinomio* $p(x) = x^4 - 5x^2 + 4$*.*

Le potenziali radici razionali del polinomio in alto sono da ricercare nell'insieme

$$R_p = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$$

PRECISAZIONI IMPORTANTI

Vi invito a leggere con la massima attenzione questa sezione ed eventualmente a fare delle domande se le cose non sono chiare. Ci stiamo occupando della fattorizzazione di un polinomio a coefficienti interi. Dobbiamo subito dire due cose importanti:

A) Un polinomio è fattorizzabile se lo possiamo scrivere come prodotto di almeno due polinomi e ciascuno dei fattori deve avere grado inferiore al polinomio di partenza. Ad esempio $p(x) = 2x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x - 2$ è fattorizzabile perché $p(x) = 2x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x - 2 = (2x^2 + 1)(x + 2)(x - 1)$.

B) La fattorizzazione di un polinomio è strettamente legata all'insieme numerico di riferimento. Il polinomio $p(x) = x^2 - 3$ non è fattorizzabile in $\mathbb{Q}$ in quanto non si può scrivere come prodotto di due polinomi di primo grado a coefficienti razionali ma è fattorizzabile in $\mathbb{R}$ in quanto possiamo scrivere $p(x) = x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$.

1. Se un polinomio a coefficienti reali $p(x)$ ammette una radice $\alpha \in \mathbb{R}$ noi sappiamo che è fattorizzabile perché il *Teorema di Ruffini* ci dice che $p(x)$ è divisibile per $x - \alpha$.

2. Un polinomio a coefficienti reali o è di secondo grado irriducibile oppure è prodotto di polinomi di secondo grado e di primo grado eventualmente con termini che si ripetono.

3. Un polinomio di secondo o terzo grado se è riducibile, allora ammette almeno una radice reale e viceversa ovvero se ammette una radice reale è fattorizzabile in $\mathbb{R}$.

4. Per i polinomi di grado maggiore uguale a quattro possono essere fattorizzabili senza avere radici, ad esempio $p(x) = 2x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 4x + 3 = (x^2 + x + 1)(2x^2 + x + 3)$ e non ha radici in $\mathbb{R}$

5. Non è facile scomporre una qualsiasi polinomio. Ad esempio se considero il polinomio $p(x) = x^4 + 1$ non è facile, almeno per uno studente del primo anno, determinare una fattorizzazione. Potete verificare che $p(x) = x^4 + 1 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(\sqrt{2}x^2 + 2x + \sqrt{2})$.

Rientriamo nel "mondo reale" e prima di proporre un esercizio utilizzando Ruffini vi enuncio alcune proposizioni che possono essere utili nella ricerca delle radici di un polinomio a coefficienti interi:

Proposizione 7 *Se la somma algebrica dei coefficienti di un polinomio $p(x)$ è nulla, allora $\alpha = 1$ è radice del polinomio.*

Ad esempio il polinomio $p(x) = 4x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 5x + 3$ ammette come radice $\alpha = 1$ in quanto la somma algebrica dei coefficienti $4 - 4 + 2 - 5 + 3 = 0$.

Proposizione 8 *Se la somma algebrica dei coefficienti di un polinomio $p(x)$ di grado pari è uguale alla somma dei coefficienti di grado dispari, allora $\alpha = -1$ è radice del polinomio.*

Ad esempio il polinomio $p(x) = 2x^4 - x^3 - 3x^2 + 3x + 3$ ammette come radice $\alpha = -1$ in quanto la somma algebrica dei coefficienti di grado pari è $2 - 3 + 3 = 2$ e la somma algebrica dei coefficienti di grado dispari è $-1 + 3 = 2$, dunque lo stesso valore.

Esercizio 9 *Utilizzando il metodo di Ruffini fattorizzare i seguenti polinomi:*

1. $p(x) = 4x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 2x + 3$

2. $p(x) = 4x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 3x - 3$

3. $p(x) = 9x^4 + 6x^3 + 19x^2 + 12x + 2$