Divisione con schema di Ruffini

Liceo Assteas, Classe 1A
Istituto "ASSTEAS"-Buccino-
F. Fernicola 26 Febbraio 2024

Sappiamo molto bene che quando operiamo una divisione tra il polinomio $a(x)$ e il polinomio $b(x)$ determiniamo i polinomi $q(x)$ e $r(x)$ con $a(x) = b(x) \cdot q(x) + r(x)$ con $0 \leq v(r(x)) < v(b(x))$ [Ricordiamo che con $v(r(x))$ e $v(b(x))$ indichiamo rispettivamente il grado del polinomio resto e del polinomio quoziente].

$$\begin{array}{r|l} a(x) & b(x) \\ \cline{2-2} \dots & q(x) \\ r(x) & \end{array}$$

Vediamo come si esegue tale divisione riportando ancora un esempio, anche se molti esempi sono stati svolti in aula:

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 + 5x^2 - 3x + 1 & x + 2 \\ \cline{2-2} -2x^3 - 4x^2 & 2x^2 + x - 5 \\ \hline x^2 - 3x + 1 & \\ -x^2 - 2x & \\ \hline -5x + 1 & \\ 5x + 10 & \\ \hline \quad 11 & \end{array}$$

Definizione 1 *Si dice* parametro direttore*, si indica con p.d., di un polinomio in una variabile il coefficiente del monomio di grado più alto. Nel polinomio* $p(x) = -5x^3 + 4x + 2$ *il p.d. è* -5*. Se il parametro direttore è* 1*, allora il polinomio do dice* monico*. Il polinomio* $p(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 3$ *è un polinomio monico. Il polinomio* $p(x) = x + 3$ *è un polinomio monico di primo grado. Ricordiamo che un generico polinomio monico di primo grado è del tipo* $p(x) = x + b$*.*

Ricordo che il metodo di Ruffini si può utilizzare quando il polinomio divisore è del tipo $p(x) = x + b$.

Quando il polinomio divisore è di primo grado ed è monico possiamo utilizzare lo schema di Ruffini. Vediamo come si svolge il precedente esercizio con il metodo di Ruffini tenendo conto che il polinomio divisore è $b(x) = x + 2$:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & 5 & -3 & 1 \\ -2 & & -4 & -2 & 10 \\ \hline & 2 & 1 & -5 & 11 \end{array}$$

Possiamo concludere che $q(x) = 2x^2+x-5$ e $r(x) = 11$. Nella parte a destra dello schema compare il polinomio resto $r(x)$ che sappiamo essere una costante e nella parte centrale ci sono i coefficienti di un polinomio di grado inferiore a uno rispetto al grado del polinomio dividendo di partenza.

Abbiamo detto che per poter utilizzare il metodo di Ruffini il polinomio divisore deve essere monico di primo grado e quindi del tipo $p(x) = x+b$. Se il polinomio è ancora di primo grado ma non monico possiamo utilizzare Ruffini? In altre parole se il polinomio divisore è del tipo $p(x) = ax+b$ possiamo applicare Ruffini? La risposta è affermativa perchè possiamo applicare una furbata e risolvere la questione.

Supponiamo che ci venga chiesto di eseguire la seguente divisione:

$$(4x^4 + 6x^2 - 3x - 2) : (2x + 1) \qquad \textbf{DIVISIONE A)}$$

In maniera tranquilla dividiamo tutti i coefficienti per 2 e quindi eseguiamo la seguente divisione (ora il polinomio divisore sarà monico di primo grado!!):

$$\left(2x^4 + 3x^2 - \frac{3}{2}x - 1\right) : \left(x + \frac{1}{2}\right) \qquad \textbf{DIVISIONE B)}$$

Siamo nelle condizioni di Ruffini per il polinomio divisore che è monico di primo grado:

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & 2 & 0 & 3 & -\frac{3}{2} & -1 \\
 & & & & & \\
-\frac{1}{2} & & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{4} & \frac{13}{8} \\
\hline
 & 2 & -1 & \frac{7}{2} & -\frac{13}{4} & \frac{5}{8}
\end{array}$$

Possiamo concludere che relativamente alla **DIVISIONE B)** abbiamo che $q^*(x) = 2x^3 - x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{13}{4}$ e $r^*(x) = \frac{5}{8}$. Ricordiamo che noi siamo interessati a $q(x)$ e $r(x)$ della **DIVISIONE A** e per un fatto teorico che giustificheremo successivamente possiamo concludere che $q(x) = 2x^3 - x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{13}{4}$, mentre $r(x) = 2 \cdot r^*(x) = 2 \cdot \frac{5}{8}$ e quindi $r(x) = \frac{5}{4}$.

In conclusione il polinomio quoziente resta lo stesso dopo "la furbata" e il polinomio resto lo dobbiamo moltiplicare per il fattore che abbiamo diviso nella "furbata". Potete infatti facilmente osservare che:

$$4x^4 + 6x^2 - 3x - 2 = (2x + 1) \cdot \left(x^3 - x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{13}{4}\right) + \frac{5}{4}$$

Esercizio 2 *Eseguire le seguenti divisioni tra polinomi con lo schema di Ruffini, determinando $q(x)$ e $r(x)$:*

a) $(-3x^3 + x - 6) : (3x - 1)$

b) $(6x^4 + 2x^2 + x + 2) : (-2x + 1)$