Equazioni di II grado

Istituto "Assteas"-Buccino-

F. Fernicola 2 Febbraio 2024

Formula risolutiva

Un'equazione di secondo grado in una variabile è una scrittura di questo tipo:

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ con } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0$$

Osservazione 1 *Ad ogni equazione di secondo grado scritta in forma normale* $ax^2 + bx + c = 0$ *è possibile associare un numero speciale, il suo* discriminante, $\Delta = b^2 - 4ac$.

Osservazione 2 *Quanti tipi di equazioni di secondo grado esistono a meno dei coefficienti* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *utilizzati? Il seguente esempio chiarisce:*

Tipologia	*Equazione*	*Discriminante* $\Delta > 0$	*Discriminante* $\Delta = 0$	*Discriminante* $\Delta < 0$
Completa	$ax^2 + bx + c = 0$	*SI*	*SI*	*SI*
Spuria	$ax^2 + bx = 0$	*SI*	*NO*	*NO*
Pura	$ax^2 + c = 0$	*SI*	*NO*	*SI*
Monomia	$ax^2 = 0$	*NO*	*SI*	*NO*
	Totale $= 7$			

Osservazione 3 *Mi sembra evidente che un'equazione completa può avere* discriminante *positivo, nullo o negativo. Le seguenti equazioni complete:* $2x^2 - 4x + 1 = 0$, $4x^2 - 4x + 1 = 0$ *e* $2x^2 + 3x + 5 = 0$ *hanno rispettivamente discriminante pari a* $\Delta = 8 > 0$, $\Delta = 0$ *e* $\Delta = -31 < 0$.

Le equazioni spurie, avendo $c = 0$, *invece hanno solo discriminante positivo. Non esistono equazioni spurie con discriminante nullo o negativo in quanto* $\Delta = b^2$.

Le equazioni pure, avendo $b = 0$, *invece possono avere discriminante positivo o negativo. Non esistono equazioni pure con discriminante nullo in quanto* $\Delta = -4ac$.

Le equazioni monomie, avendo $b = c = 0$, *invece possono avere discriminante soltanto nullo. Non esistono equazioni monomie con discriminante positivo o negativo in quanto* $\Delta = 0$.

Un'equazione di secondo grado può avere al più due radici e questo sostanzialmente dipende dal discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ e ora vedremo perchè accade questo fenomeno. Come facciamo a determinare le radici di un'equazione? Dobbiamo utilizzare la formula risolutiva. Da dove viene la formula risolutiva? Ora lo spiego da dove nasce!!!

Partiamo da $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$ altrimenti l'equazione non è di secondo grado (ipotesi importante da fare!!), poi b, c possono essere qualsiasi e non ci interessa. Moltiplichiamo ambi i membri per $4a$ e noi sappiamo che ci stiamo avvalendo del *secondo principio* sulle equazioni..ricordate cosa dice? Per questo è importante che sia $a \neq 0$ cosi anche $4a \neq 0$. Otteniamo quindi $4a^2 + 4abx + 4ac = 0$, ora all'equazione precedente aggiungiamo ad ambo i membri $b^2 - 4ac$ e lo faccio in nome del*primo principio* sulle equazioni...ricordate cosa dice? a questo punto avrò:

$$4a^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

Ora battezzo, perchè non mi voglio portare dietro cose "pesanti", $\Delta = b^2 - 4ac$ e notando anche che primo membro si materializza un trinomio riconducibile a quadrato di binomio, possiamo scrivere:

$(2ax + b)^2 = \Delta \iff 2ax + b = \pm\sqrt{\Delta} \iff 2ax = -b \pm \sqrt{\Delta}$, osserviamo che ora possiamo dividere per $2a$ in quanto sappiamo che $a \neq 0$ e quindi finalmente:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \begin{array}{l} \nearrow \quad x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \\ \searrow \quad x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{array} \qquad \text{(Formula Risolutiva)}$$

Osservazione 4 *La formula risolutiva noi la utilizziamo principalmente per* equazioni complete *con il $\Delta > 0$. Osserviamo anche esplicitamente che se il coefficiente b è pari è conveniente utilizzare la* Formula Risolutiva Ridotta*:*

$$x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{-\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a} = \begin{array}{l} \nearrow \quad x_1 = \dfrac{-\frac{b}{2} + \sqrt{-\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a} \\ \\ \searrow \quad x_2 = \dfrac{-\frac{b}{2} - \sqrt{-\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a} \end{array} \qquad \textit{(Formula Risolutiva Ridotta)}$$

.

Esercizio 1 *Risolvere la seguente equazione:*

$$2x^2 + x - 6 = 0$$

Svolgimento

Immediatamente calcoliamo $\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 48 = 49$ e siamo contenti! Determiniamo le due radici distinte:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm 7}{4} = \begin{array}{l} \nearrow \quad x_1 = \dfrac{-1 + 7}{4} = 1 \Longrightarrow x_1 = \dfrac{3}{2} \\ \\ \searrow \quad x_2 = \dfrac{-1 - 7}{4} = -\dfrac{8}{2} \Longrightarrow x_2 = -2 \end{array}$$

Esercizio 2 *Risolvere la seguente equazione:*

$$5x^2 - 4x - 1 = 0$$

Svolgimento

Immediatamente noto che $b = -4$ è pari e calcoliamo $\dfrac{\Delta}{4} = \left(-\dfrac{b}{2}\right)^2 - ac = 4 + 5 = 9$ e siamo contenti! Determiniamo le due radici distinte:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{9}}{5} = \begin{array}{l} \nearrow \quad x_1 = \dfrac{2+3}{5} = 1 \\ \searrow \quad x_2 = \dfrac{2-3}{5} = -\dfrac{1}{5} \end{array}$$

Esercizio 3 *Risolvere la seguente equazione:*

$$4x^2 - 2x - 3 = 0$$

Svolgimento

Immediatamente noto che $b = -2$ è pari e calcoliamo $\dfrac{\Delta}{4} = \left(-\dfrac{b}{2}\right)^2 - ac = 1 + 12 = 13$ e siamo un pochino meno contenti perchè il Δ non è un quadrato! Determiniamo le due radici distinte con la formula ridotta:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{4} = \begin{array}{l} \nearrow \quad x_1 = \dfrac{1+\sqrt{13}}{4} \\ \searrow \quad x_2 = \dfrac{1-\sqrt{13}}{4} \end{array}$$

Esercizio 4 *Risolvere la seguente equazione:*

$$9x^2 - 6x + 1 = 0$$

Svolgimento

Immediatamente noto che $b = 6$ è pari e calcoliamo $\dfrac{\Delta}{4} = \left(-\dfrac{b}{2}\right)^2 - ac = 9 - 9 = 0$ e siamo contenti! Determiniamo le due radici coincidenti (ricordate che $\Delta = 0$!) con la formula:

$$x_1 = x_2 = \frac{-\frac{b}{2}}{a} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Esercizio 5 *Risolvere la seguente equazione:*

$$-3x^2 + 3x - 1 = 0$$

Svolgimento

Immediatamente calcoliamo $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 12 < 0$ e siamo contentissimi! In questo caso l'equazione non ha radici reali!