Esercizi con valori assoluti

Istituto "ASSTEAS"-Buccino-
F. Fernicola 13 Novembre 2024

Esempio 1 *Risolvere la seguente equazione contenente valori assoluti:*

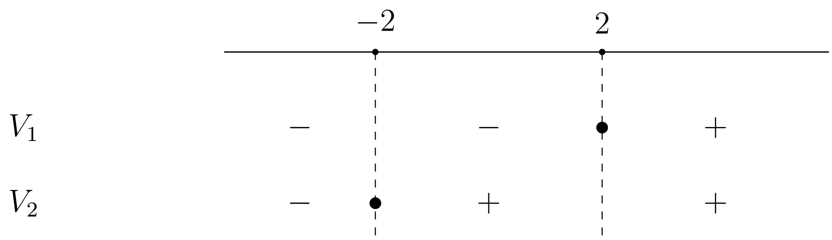
$$|x-2|-4|x+2|=x-1$$

Svolgimento

Intanto ci studiamo il segno dei due valori assoluti:

$x-2 \geq 0 \Longrightarrow x \geq 2$

$x+2 \geq 0 \Longrightarrow x \geq -2$



$C.A.$ con $x<-2$, allora l'equazione diventa:

$-x+2+4x+8=x-1 \Longrightarrow 2x=-11 \Longrightarrow x=-\dfrac{11}{2}$. Soluzione accettabile.

$C.A.$ con $-2 \leq x \leq 2$, allora l'equazione diventa:

$-x+2-4x-8=x-1 \Longrightarrow 6x=-5 \Longrightarrow x=-\dfrac{5}{6}$. Soluzione accettabile.

$C.A.$ con $x>2$, allora l'equazione diventa:

$x-2-4x-8=x-1 \Longrightarrow 4x=-9 \Longrightarrow x=-\dfrac{9}{4}$. Soluzione non accettabile.

Possiamo concludere che $S=\left\{-\dfrac{11}{2},-\dfrac{5}{6}\right\}$

Esempio 2 *Risolvere la seguente equazione contenente valori assoluti:* $|1-3x|=8$

Svolgimento

Questo esercizio è del tipo **Caso 1** e quindi si spezza nelle due equazioni in due equazioni:

$1-3x=8 \quad \vee \quad 1-3x=-8.$

La prima equazione diventa $3x=-7 \Longrightarrow x=-\dfrac{7}{3}$.

La seconda equazione diventa $3x=9 \Longrightarrow x=3$.

In definitiva le soluzioni dell'equazione assegnata sono: $S=\left\{-\dfrac{7}{3},3\right\}$.

Esempio 3 *Risolvere la seguente equazione contenente valori assoluti:* $|3x-5|=-3$

Svolgimento

Osservate bene l'equazione assegnata prima di partire in una risoluzione meccanica. In questo caso a primo membro abbiamo una quantità non negativa e il secondo membro è negativo, dunque non può sussistere un'uguaglianza e quindi l'equazione è impossibile ovvero $S=\emptyset$.

Esempio 4 *Risolvere la seguente equazione contenente valori assoluti:* $|x^2-1|+|x+3|=0$

Svolgimento

Osservate bene l'equazione assegnata prima di partire in una risoluzione meccanica. In questo caso a primo membro abbiamo la somma di due quantità non negative e quindi essa sarà $0 \iff$ entrambi i valori assoluti saranno nulli. Il primo valore assoluto si annulla per $x=\pm1$ e il secondo valore assoluto per $x=-3$. Non esiste un valore comune e quindi l'equazione è impossibile ovvero $S=\emptyset$.

Esempio 5 *Risolvere la seguente equazione contenente valori assoluti:*

$$|2x^2+x-1|+|x^2-x-2|=0$$

Svolgimento

Osservate bene l'equazione assegnata prima di partire in una risoluzione meccanica. In questo caso a primo membro abbiamo la somma di due quantità non negative e quindi essa sarà $0 \iff$ entrambi i valori assoluti saranno nulli. Il primo valore assoluto si annulla per $x=\frac{1}{2} \vee x=-1$ e il secondo valore assoluto per $x=2 \vee -1$. In questo caso la soluzione dell'equazione $x=-1$, valore comune e quindi $S=\{-1\}$.

Esempio 6 *Risolvere la seguente equazione contenente valori assoluti:*

$$|x^2-3x|=|x^2-4x|$$

Svolgimento

Osserviamo in maniera preliminare che si tratta di un'equazione del tipo **Caso 3**. L'equazione si "spezza" in due equazioni:

$$x^2-3x=x^2-4x \quad \vee \quad x^2-3x=-x^2+4x$$

La prima equazione diventa $x=0$.
La seconda equazione diventa $2x^2-7x=0 \Longrightarrow x_1=0 \vee x_2=\frac{7}{2}$.

Possiamo concludere che $S=\left\{0,\frac{7}{2}\right\}$.

Esempio 7 *Risolvere la seguente equazione contenente valori assoluti:* $6=-\dfrac{1-x}{|4+x|}$

Svolgimento

Osserviamo in maniera preliminare che si tratta di un'equazione fratta contenente valori assoluti. Ovvio che deve essere $x\neq-4$.

In casi come questi che esiste un solo valore assoluto, tentiamo di ”isolarlo” e scriviamo:

$|x+4| = \dfrac{x-1}{6}$. Ora l'uguaglianza sussiste purché il secondo membro è non negativo e quindi $x \geq 1$ e questo ci garantisce anche che sia $x \neq -4$. In tal caso l'equazione si ”spezza” in due equazioni: $x+4 = \dfrac{x-1}{6} \quad \vee \quad x+4 = -\dfrac{x-1}{6}$

La prima equazione diventa $6x+24 = x-1 \Longrightarrow 5x = -25 \Longrightarrow x = -5$ soluzione non accettabile.

La seconda equazione diventa $6x+24 = -x+1 \Longrightarrow 7x = -23 \Longrightarrow x = -\dfrac{23}{7}$ soluzione non accettabile. Possiamo concludere che $S = \emptyset$.

Osservazione 1 *Quando ci viene assegnata un equazione con valori assoluti, utilizzando le proprietà messe in evidenza in* ***Proprietà valori assoluti****, vediamo se è possibile trasformare l'equazione nel tipo* ***caso 1****,* ***caso 2*** *o* ***caso 3****, altrimenti se ci sono ”molti valori assoluti” conviene proseguire come nel primo esempio.*

Esempio 8 *Risolvere la seguente equazione contenente valori assoluti:*

$$2\left|x^2-1\right| = 3|x|$$

Svolgimento

Tentiamo sempre di vedere se è possibile scriverlo nel modo $|f(x)| = g(x)$. Non ci sono dubbi che possiamo scrivere $\dfrac{\left|x^2-1\right|}{|x|} = \dfrac{3}{2}$ (osserviamo che $x \neq 0$, in quanto non è soluzione e possiamo dividere per x), ora se teniamo conto delle proprietà evidenziate negli appunti scritti sui valori assoluti ci possiamo ricondurre alla forma:

$$\left|\frac{x^2-1}{x}\right| = \frac{3}{2}$$

Ora l'equazione si ”spezza” in due equazioni: $\dfrac{x^2-1}{x} = \dfrac{3}{2} \qquad \vee \qquad \dfrac{x^2-1}{x} = -\dfrac{3}{2}$.

La prima equazione diventa $2x^2-3x-2 = 0 \Longrightarrow x_1 = -\dfrac{1}{2}$ e $x_2 = 2$.

La seconda equazione diventa $2x^2+3x-2 = 0 \Longrightarrow x_1 = \dfrac{1}{2}$ e $x_2 = -2$.

In definitiva le soluzioni dell'equazione assegnata sono:

$S = \left\{-\dfrac{1}{2}, 2, \dfrac{1}{2}, -2\right\}$.

Esempio 9 *Risolvere la seguente equazione contenente valori assoluti:*

$$\frac{x}{2|3-2x|} + 1 = \frac{5}{4}$$

Svolgimento

Osserviamo in maniera preliminare che si tratta di un'equazione fratta contenente valori assoluti. Ovvio che deve essere $x \neq \dfrac{3}{2}$. Tentiamo sempre di vedere se è possibile scriverlo nel modo $|f(x)| = g(x)$.

Non ci sono dubbi che possiamo scrivere $\dfrac{x}{2|3-2x|} = \dfrac{5}{4} - 1 \Longrightarrow \dfrac{x}{2|3-2x|} = \dfrac{1}{4}$ e finalmente possiamo scrivere:

$$|3-2x|=2x$$

Ora l'uguaglianza sussiste purché il secondo membro risulta non negativo e quindi $x\geq 0$ e ricordiamo che comunque deve essere $x\neq\frac{3}{2}$, dunque $C.A.: x\geq 0\wedge x\neq\frac{3}{2}$. In tal caso l'equazione si "spezza" in due equazioni: $3-2x=2x \quad \vee \quad 3-2x=-2x$

La prima equazione diventa $4x=3\Longrightarrow x=\frac{3}{4}$.

La seconda equazione diventa $0x=3$, equazione impossibile.

In definitiva le soluzioni dell'equazione assegnata sono: $S=\left\{\frac{3}{4}\right\}$.

Esempio 10 *Risolvere la seguente equazione contenente valori assoluti:*

$$|x|-2|x+3|=0$$

Svolgimento

Tentiamo sempre di vedere se è possibile scriverlo nel modo $|f(x)|=g(x)$. Non ci sono dubbi che possiamo scrivere $2|x+3|=|x|\Longrightarrow\frac{|x|}{|x+3|}=2$ (osserviamo che $x=-3$ non è soluzione e quindi $x+3\neq 0$ e possiamo dividere per $|x+3|$) e finalmente, utilizzando le proprietà sui valori assoluti, possiamo scrivere:

$$\left|\frac{x}{x+3}\right|=2$$

In tal caso l'equazione si "spezza" in due equazioni: $\frac{x}{x+3}=2 \quad \vee \quad \frac{x}{x+3}=-2$.

La prima equazione diventa $2x+6=x\Longrightarrow x=-6$.

La seconda equazione diventa $-2x-6=x\Longrightarrow 3x=-6\Longrightarrow x=-2$.

In definitiva le soluzioni dell'equazione assegnata sono: $S=\{-6,-2\}$.

Esempio 11 *Risolvere la seguente equazione contenente valori assoluti:*

$$\frac{|x-2|}{x}=\frac{x}{|x-2|+1}$$

Svolgimento

Tentiamo di manipolarla per scriverla in una forma migliore. Intanto osserviamo che deve essere $x\neq 0\wedge x\neq 2$. Non ci sono dubbi che possiamo scrivere $|x-2||x-2|+|x-2|=x^2\Longrightarrow |(x-2)^2|+|x-2|=x^2$ [abbiamo utilizzato la proprietà $|a||b|=|ab|$ e teniamo anche conto che $(x-2)^2\geq 0$ e quindi $|(x-2)^2|=(x-2)^2$] e finalmente possiamo scrivere:

$$(x-2)^2+|x-2|=x^2$$

Ora possiamo sviluppare l'equazione $x^2-4x+4+|x-2|=x^2\Longrightarrow |x-2|=4x-4$. Ora l'uguaglianza sussiste purché il secondo membro risulta non negativo e quindi $4x-4\geq 0$ e ricordiamo che comunque deve essere $x\neq 2$, dunque $C.A.: x\geq 1\wedge x\neq 2$. In tal caso l'equazione si "spezza" in due equazioni: $x-2=4x-4 \quad \vee \quad x-2=-4x+4$

La prima equazione diventa $3x=2\Longrightarrow x=\frac{2}{3}$, soluzione non accettabile.

La seconda equazione diventa $5x=6\Longrightarrow x=\frac{6}{5}$, soluzione non accettabile.

In definitiva le soluzioni dell'equazione assegnata sono: $S=\left\{\frac{6}{5}\right\}$.

Esercizio 1 *Risolvere le seguenti equazioni contenenti valori assoluti*

1) $\left|\frac{2}{3}x-2\right|=\frac{1}{2};\qquad S=\left\{\frac{9}{4},\frac{15}{4}\right\}.$

2) $\left|\frac{3}{4}x^2-2x+1\right|=-\frac{5}{6};\qquad S=\emptyset.$

3) $\left|3x^2-x-2\right|=0;\qquad S=\left\{-\frac{2}{3},1\right\}.$

4) $|3-x|+3x-|x-1|=2+|x|;\qquad S=\{0\}.$

5) $|2x-3|-x=2;\qquad S=\left\{\frac{1}{3},5\right\}.$

6) $|3x-1|=\left|\frac{1}{2}x-1\right|;\qquad S=\left\{0,\frac{4}{7}\right\}.$

7) $(1+|x|)^2=x^2-3|x|+2;\qquad S=\left\{-\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right\}.$

8) $\frac{2-x}{|2x+1|}=\frac{5}{3};\qquad S=\left\{-\frac{11}{7},\frac{1}{13}\right\}.$