Segno del trinomio e grafico di una parabola

Liceo Assteas -Buccino-

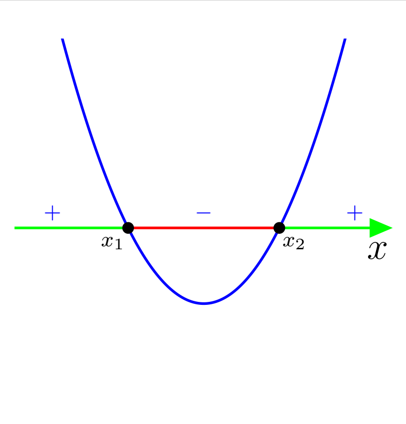
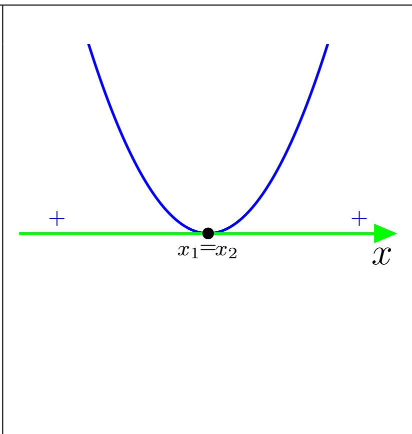
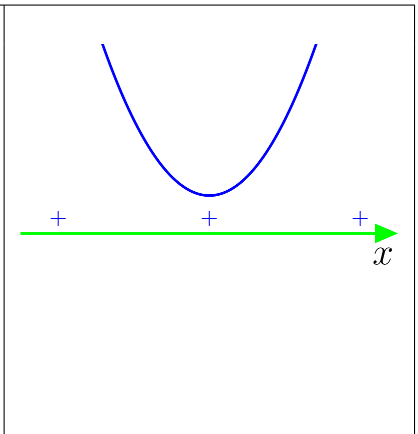
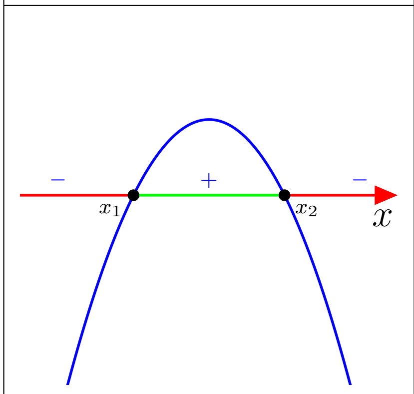
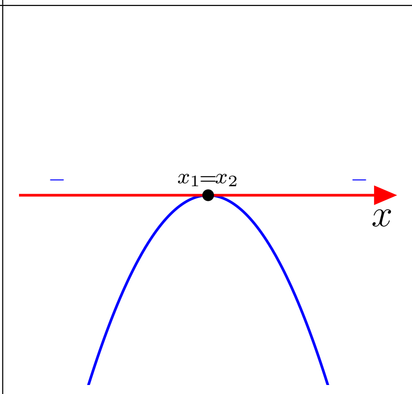
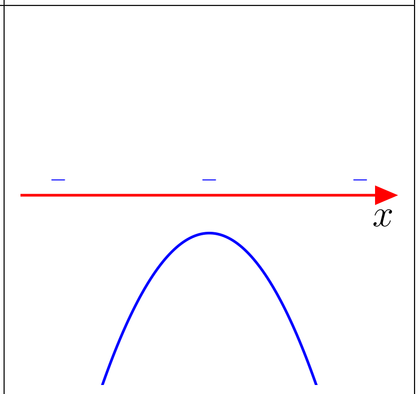
F. Fernicola

20 Novembre 2023

1 Osservazioni preliminari

Per rendere le cose più agevoli e per dare soprattutto uno spunto di riflessione ho pensato di scrivere questa nota. Tutti sanno che una parabola è individuata da un'equazione del tipo $y = ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Quando noi risolviamo un'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, non facciamo altro che determinare le ascisse dei punti di intersezione tra la parabola e l'asse delle x, in altre parole risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c & \textit{equazione parabola} \\ y = 0 & \textit{equazione asse } x \end{cases}$$

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr><td>Figura 1</td><td>Figura 2</td><td>Figura 3</td></tr>
<tr><td>$\Delta > 0$ e $a > 0$</td><td>$\Delta = 0$ e $a > 0$</td><td>$\Delta < 0$ e $a > 0$</td></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr><td>Figura 4</td><td>Figura 5</td><td>Figura 6</td></tr>
<tr><td>$\Delta > 0$ e $a < 0$</td><td>$\Delta = 0$ e $a < 0$</td><td>$\Delta < 0$ e $a < 0$</td></tr>
</table>

Osservazione 1 *Risolvere le seguenti disequazioni:*

$$
\begin{aligned}
&(a) \quad 2x^2 + x - 1 \geq 0 \\
&(b) \quad 2x^2 + x - 1 > 0 \\
&(c) \quad 2x^2 + x - 1 \leq 0 \\
&(d) \quad 2x^2 + x - 1 < 0
\end{aligned}
$$

Svolgimento

Nel risolvere la disequazione è evidente che oltre al trinomio assegnato, nello scrivere le soluzioni, è importante vedere anche il verso della disequazione. A tal proposito vi faccio vedere come si svolgono le disequazioni in $a)$, $b)$, $c)$, $d)$. Osservate che il trinomio è lo stesso, cambia solo il verso. Troviamo che $\Delta = 9 > 0$ e utilizzando la formula risolutiva troviamo le radici $x_1 = -1$ e $x_2 = \frac{1}{2}$. Ora iniziamo a distinguere:

- (a) Siamo nel caso della $Figura$ 1 perché $a = 2 > 0$ e vedendo il verso ≥ 0 (tratto verde incluse le radici con parentesi quadra) devo scrivere $S = (-\infty, -1] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

- (b) Siamo nel caso della $Figura$ 1 perché $a = 2 > 0$ e vedendo il verso > 0 (tratto verde escluse le radici con parentesi tonda) devo scrivere $S = (-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

- (c) Siamo nel caso della $Figura$ 1 perché $a = 2 > 0$ e vedendo il verso ≤ 0 (tratto rosso incluse le radici con parentesi quadra) devo scrivere $S = \left[-1, \frac{1}{2}\right]$.

- (d) Siamo nel caso della $Figura$ 1 perché $a = 2 > 0$ e vedendo il verso < 0 (tratto rosso escluse le radici con parentesi tonda) devo scrivere $S = \left(-1, \frac{1}{2}\right)$.

Esempio 1 *Risolvere la seguente disequazione:*

$$x^2 - 16 > 0$$

Svolgimento

Si vede facilmente che le radici sono $x_1 = -4$ e $x_2 = 4$, dunque siamo nel caso di $Figura$ 1 perchè $\Delta > 0$ e $a = 1 > 0$ e quindi possiamo concludere che $S = (-\infty, -4) \cup (4 + \infty)$.

Esempio 2 *Risolvere la seguente disequazione:*

$$-3x^2 + 5x \geq 0$$

Svolgimento

Si vede facilmente che le radici sono $x_1 = 0$ e $x_2 = \frac{5}{3}$, dunque siamo nel caso di $Figura$ 4 perchè $\Delta > 0$ e $a = -3 < 0$ e quindi possiamo concludere che $S = \left[0, \frac{5}{3}\right]$.

Osservazione 2 *Se io avessi risolto l'equazione equivalente* $3x^2 - 5x \leq 0$*, avrei ottenuto la stessa conclusione in quanto le radici restano le stesse e* $a = 3 > 0$*. In questo caso però guardiamo la* $Figura$ 1 *e quindi* $S = \left[0, \frac{5}{3}\right]$*. Questo ci insegna che quando abbiamo una disequazione con il coefficiente di* x^2 *negativo, cambiamo di segno a tutti i termini e con il verso opposto si ottiene una disequazione equivalente.*

Esempio 3 *Risolvere la seguente disequazione:*

$$-x^2 - x + 2 \geq 0$$

Svolgimento
Anzichè quella assegnata possiamo per gusto risolvere $x^2 + x - 2 \leq 0$. Troviamo che $\Delta = 9 > 0$ e utilizzando la formula risolutiva troviamo le radici $x_1 = -2$ e $x_2 = 1$. Siamo nel caso della $Figura$ 1 perché $a = 1 > 0$ e quindi concludiamo $S = [-2, 1]$. Osserviamo esplicitamente che se volessimo risolvere l'equazione assegnata, siamo nel caso $Figura$ 4 in quanto $a = -1 < 0$ e quindi la medesima conclusione $S = [-2, 1]$.

Esempio 4 *Risolvere la seguente disequazione:*

$$-3x^2 \geq 0$$

Svolgimento
Si vede facilmente $\Delta = 0$ e che le radici sono $x_1 = x_2 = 0$, dunque siamo nel caso di $Figura$ 5 in quanto $a = -3 < 0$ e quindi possiamo concludere che $S = \{0\}$.

Esempio 5 *Risolvere la seguente disequazione:*

$$3x^2 + x + 1 \leq 0$$

Svolgimento
Si vede facilmente $\Delta = -11 < 0$ e $a = 3 > 0$, dunque siamo nel caso di $Figura$ 3 e quindi possiamo concludere che $S = \emptyset$.

Esempio 6 *Risolvere la seguente disequazione:*

$$x^2 + 5x + 8 \geq 0$$

Svolgimento
Si vede facilmente $\Delta = -7 < 0$ e $a = 1 > 0$, dunque siamo nel caso di $Figura$ 3 e quindi possiamo concludere che $S = \mathbb{R}$.

Esempio 7 *Risolvere la seguente disequazione:*

$$4x^2 > 0$$

Svolgimento
Si vede facilmente $\Delta = 0$ e che le radici sono $x_1 = x_2 = 0$, dunque siamo nel caso di *Figura* 2 in quanto $a = 4 > 0$ e quindi possiamo concludere che $S = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Esempio 8 *Risolvere la seguente disequazione:*

$$-2x^2 + 3x - 4 > 0$$

Svolgimento
Si vede facilmente $\Delta = -23 < 0$ e $a = -2 < 0$, dunque siamo nel caso di *Figura* 6 e quindi possiamo concludere che $S = \emptyset$.

Esempio 9 *Risolvere la seguente disequazione:*

$$9x^2 - 6x + 1 \geq 0$$

Svolgimento
Si vede facilmente $\Delta = 0$ e che le radici sono $x_1 = x_2 = \dfrac{1}{3}$, dunque siamo nel caso di *Figura* 2 in quanto $a = 9 > 0$ e quindi possiamo concludere che $S = \mathbb{R}$.

Esempio 10 *Risolvere la seguente disequazione:*

$$4x^2 + 1 \leq 0$$

Svolgimento
Si vede facilmente $\Delta < 0$ (equazione pura che non ha radici), dunque siamo nel caso di *Figura* 3 in quanto $a = 4 > 0$ e quindi possiamo concludere che $S = \emptyset$.

Esempio 11 *Risolvere la seguente disequazione:*

$$-9x^2 + 4 \leq 0$$

Svolgimento
Si vede facilmente che le radici sono $x_1 = -\dfrac{2}{3}$ e $x_2 = \dfrac{2}{3}$, dunque siamo nel caso di *Figura* 4 in quanto $a = -9 < 0$ e quindi possiamo concludere che $S = \left(-\infty, -\dfrac{2}{3}\right] \cup \left[\dfrac{2}{3}, +\infty\right)$.

Esempio 12 *Risolvere la seguente disequazione:*

$$-x^2 + 2x - 1 > 0$$

Svolgimento
Si vede facilmente che $\Delta = 0$, le radici sono $x_1 = x_2 = 1$, dunque siamo nel caso di $Figura$ 5 in quanto $a = -1 < 0$ e quindi possiamo concludere che $S = \emptyset$.

Esempio 13 *Risolvere la seguente disequazione:*

$$-x^2 - 1 \leq 0$$

Svolgimento
Si vede facilmente $\Delta < 0$ (equazione pura che non ha radici), dunque siamo nel caso di $Figura$ 6 in quanto $a = -1 < 0$ e quindi possiamo concludere che $S = \mathbb{R}$.