Nozioni di base sulle equazioni irrazionali

Istituto "ASSTEAS"-Buccino-

F. Fernicola 9 Maggio 2024

Definizione 1 *Un'equazione si dice* irrazionale *quando contiene almeno un radicale nel cui radicando compare l'incognita.*

Osservazione 1 *In questa nota quando nelle formule utilizzeremo* $f(x), g(x), h(x) \cdots$ *solitamente intenderemo polinomi in una variabile.*

Esempio 1 *Non sono equazioni irrazionali le seguenti espressioni:*

a) $2x + \sqrt{5}x = x^2 - 1$*;*

b) $3x^2 - \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}x = \dfrac{1}{x}$

La prima è un'equazione intera a coefficienti irrazionali e la seconda è un'equazione frazionaria a coefficienti irrazionali.

Esempio 2 *Sono equazioni irrazionali le seguenti espressioni:*

a) $\sqrt{x+1} = 2$*;*

b) $\sqrt[5]{3x^2 - 1} = 2x - 1$

c) $\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{x + 2}$

Osservazione 2 *In questa nota introduttiva noi tratteremo particolari equazioni irrazionali, in altre parole non ci occuperemo della risoluzione di una qualsiasi equazione irrazionale. Un tale obiettivo potrebbe risultare eccessivamente ambizioso. Noi ci occuperemo di* ***a)*** *equazioni irrazionali con radicali quadrati e* ***b)*** *equazioni irrazionali con radicali cubici, vedremo che la seconda tipologia sarà molto più semplice da affrontare.*

EQUAZIONI TIPO 1 Radicali quadratici del tipo $\sqrt{f(x)} = a$ con $a < 0$

Un equazione irrazionale di questo tipo non offre particolari difficoltà, ad esempio se qualcuno ci propone di risolvere l'equazione irrazionale $\sqrt{4x-3} = -5$ noi diremo che $S = \emptyset$ o è *impossibile* in quanto il primo membro è non negativo e non ci può essere uguaglianza.

EQUAZIONI TIPO 2 Radicali quadratici del tipo $\sqrt{f(x)} = a$ con $a \geq 0$

Un equazione irrazionale di questo tipo non offre particolari difficoltà, siccome il secondo membro è non negativo è sufficiente risolvere l'equazione $f(x) = a^2$. Ad esempio ci viene proposto di risolvere l'equazione: $\sqrt{x^2 - 3} = 2$

E' sufficiente risolvere l'equazione $x^2 - 3 = 4 \Longrightarrow x^2 = 7 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{7}$.

Vediamo ancora un esempio: $\sqrt{x^2 - 3x} = 2 \Longrightarrow x^2 - 3x = 4 \Longrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Longrightarrow$
$\Longrightarrow x_1 = -1 \vee x_2 = 4$. Ancora un esempio: $\sqrt{2x-3} = 0 \Longrightarrow 2x - 3 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{3}{2}$. In queste situazioni siccome il secondo membro è non negativo dovete liberamente elevare al quadrato ambo i membri e prendere tutte le soluzioni che trovate.

EQUAZIONI TIPO 3 Radicali quadratici del tipo $\sqrt{f(x)} = g(x)$

Un equazione irrazionale di questo tipo non offre particolari difficoltà e bisogna solo impostare una banale disequazione aggiuntiva. Siccome vogliamo che ci sia uguaglianza tra i due membri ci dobbiamo garantire che $g(x) \geq 0$ e poi risolvere l'equazione $f(x) = [g(x)]^2$. Tra le soluzioni di quest'ultima equazione dobbiamo conservare quelle che soddisfano la condizione $g(x) \geq 0$. Vediamo un esempio: $\sqrt{2x^2 - 6x + 1} = x - 2$.

In questo caso dobbiamo impostare la disequazione $x - 2 \geq 0 \Longrightarrow x \geq 2$. Ora risolviamo l'equazione:

$2x^2 - 6x + 1 = (x-2)^2 \Longrightarrow 2x^2 - 6x + 1 = x^2 - 4x + 4 \Longrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Longrightarrow$
$\Longrightarrow x_1 = -1 \vee x_2 = 3$. Concludiamo che la soluzione dell'equazione irrazionale posta è solo $x = 3$ (soddisfa la condizione $x \geq 2$).

EQUAZIONI TIPO 4 Radicali quadratici del tipo $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$

Un equazione irrazionale di questo tipo non offre particolari difficoltà e bisogna solo impostare una banale disequazione aggiuntiva. Siccome vogliamo che ci sia uguaglianza tra i due membri è sufficiente risolvere uno dei due sistemi:

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

Dei due sistemi prendiamo quello più semplice.

Vediamo un esempio: $\sqrt{x^2 + 8x - 5} = \sqrt{4x}$.

Alla luce dell'esercizio assegnato evidente che è preferibile risolvere:

$$\begin{cases} 4x \geq 0 \\ x^2 + 8x - 5 = 4x \end{cases} \quad \text{Evidente che preferiamo non risolvere} \quad \begin{cases} x^2 + 8x - 5 \geq 0 \\ x^2 + 8x - 5 = 4x \end{cases}$$

Anche risolvendo il secondo sistema arriveremmo alla stessa conclusione. Noi preferiamo risolvere il primo sistema perchè c'è in gioco una disequazione di primo grado semplice e quindi le soluzioni devono soddisfare la condizione $x \geq 0$.

$x^2 + 8x - 5 = 4x \Longrightarrow x^2 + 4x - 5 = 0 \Longrightarrow x_1 = -5 \vee x_2 = 1$ e concludiamo che la soluzione dell'equazione irrazionale è $x = 1$ in quanto è l'unica a soddisfare la condizione $x \geq 0$. Provate a risolvere per gioco l'altro sistema e vedrete che otterrete la stessa conclusione. La morale....quando per caso vi imbatterete in un'equazione irrazionale del tipo $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ impostate $f(x) \geq 0$ se è più semplice di $g(x) \geq 0$ o viceversa. Fate la scelta vincente!!!!!!

Se volete giocare risolvete l'equazione irrazionale $\sqrt{x+2} = \sqrt{x^2 + 6x + 6}$. **Soluzione** $x = -1$.

EQUAZIONI TIPO 5 Radicali cubici del tipo $\sqrt[3]{f(x)} = g(x)$

Quando compaiono equazioni irrazionali con radicali cubici o in generale radicali con indice dispari non ci sta tanto da pensare sulle condizioni da porre perchè tutto è lecito la cosa importante è andare avanti con l'intento di far scomparire i radicali. L'equazione in alto velocemente sarà trasformata nell'equazione razionale equivalente $f(x) = [g(x)]^3$ (ammette le stesse soluzioni di quella assegnata). Ad esempio ci viene chiesto di risolvere l'equazione irrazionale:

$$\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 2x + 3} = x + 1$$

Senza pensarci più di tanto eleviamo entrambi i membri alla terza e quindi:

$x^3 + 2x^2 + 2x + 3 = (x+1)^3 \Longrightarrow x^3 + 2x^2 + 2x + 3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Longrightarrow x_1 = -2 \vee x_2 = 1$. Le due radici sono entrambi ”buone”. Se sostituite i valori trovati, per gioco, nell'equazione assegnata vi renderete conto che entrambe la verificano!!!!!

EQUAZIONI TIPO 6 Radicali cubici del tipo $\sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{g(x)}$

Quando compaiono equazioni irrazionali con radicali cubici o in generale radicali con indice dispari non ci sta tanto da pensare sulle condizioni da porre perché tutto è lecito la cosa importante è andare avanti con l'intento di far scomparire i radicali. L'equazione in alto viene velocemente sarà trasformata nell'equazione razionale equivalente $f(x) = g(x)$ (ammette le stesse soluzioni di quella assegnata). Ad esempio ci viene chiesto di risolvere la seguente equazione irrazionale:

$$\sqrt[3]{x^2 - 6x + 1} = \sqrt[3]{-5x + 1}$$

Senza pensarci più di tanto eleviamo entrambi i membri alla terza e quindi e otteniamo $x^2 - 6x + 1 = -5x + 1 \Longrightarrow x^2 - x = 0 \Longrightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = 1$. Le due radici sono entrambi ”buone”. Se sostituite i valori trovati, per gioco, nell'equazione assegnata vi rendete conto che entrambe la verificano!!!!!

In questa nota vediamo l'ultimo esempio delle cose ordinarie che possono materializzarsi sotto i vostri occhi in questo percorso, poi a parte scriverò qualche approfondimento per mettere qualche freccia in più nella faretra!!!

EQUAZIONI TIPO 7 Radicali misti del tipo $\sqrt[m]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$ con m dispari e n pari

Occhio quando si materializzano radicali con indici pari n perchè il radicando deve essere non negativo. Solitamente $m = 3$ e $n = 2$ e quello che si fa è elevare entrambi alla potenza $m.c.m.(m, n)$. Prendiamo ad esempio il caso tipico $\sqrt[3]{f(x)} = \sqrt{g(x)}$, con la condizione aggiuntiva $g(x) \geq 0$ (esistenza del radicale con indice dispari) e $f(x) \geq 0$ (condizione di concordanza del segno). Ora eleviamo entrambi i membri alla sesta e si risolve l'equazione razionale $[f(x)]^2 = [g(x)]^3$. Ad esempio ci viene chiesto di risolvere l'equazione irrazionale:

$$\sqrt[3]{13x + 1} = \sqrt{4x + 1}$$

$$\begin{cases} 4x + 1 \geq 0 \\ 13x + 1 \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow x \geq -\frac{1}{13}$$

Eleviamo entrambi i membri alla sesta e otteniamo:

$(13x + 1)^2 = (4x + 1)^3 \Longrightarrow 169x^2 + 26x + 1 = 64x^3 + 48x^2 + 12x + 1$

$\Longrightarrow 64x^3 - 121x^2 - 14x = 0 \Longrightarrow x(64x^2 - 121x - 14) = 0$. Le soluzioni sono $x_1 = 0$ e le altre due radici dell'equazione di secondo grado si trovano con pazienza e sono $x_2 = 2$ e $x_3 = -\frac{7}{64}$. Le soluzioni da accettare per l'equazione irrazionale sono $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$ e l'altra è da scartare perchè noi vogliamo soluzioni $x \geq -\frac{1}{13}$ mentre $x_3 = -\frac{7}{64}$ è minore di $-\frac{1}{13}$.