

Relazione tra rette ortogonali

Liceo Assteas -Buccino-

F. Fericola

30 Settembre 2023

Noi tutti sappiamo che una qualsiasi retta (verticale, orizzontale e obliqua) ha una forma implicita che si sintetizza nella relazione algebrica $ax + by + c = 0$. La forma esplicita di una retta è un privilegio solo di quelle che non sono verticali e la forma è data dalla relazione $y = mx + q$. Nella forma esplicita il coefficiente di x , ovvero m , si dice *coefficiente angolare* della retta e la quantità q si chiama *ordinata all'origine*. Il coefficiente angolare fornisce indicazioni sulla direzione della retta, esso ha una relazione stretta con l'angolo che la retta forma con il semiasse positivo delle ascisse. L'ordinata all'origine invece fornisce indicazioni sulle coordinate del punto di intersezione della retta con l'asse delle ordinate; se q è l'ordinata all'origine la retta intersecherà l'asse delle ordinate nel punto $R \equiv (0, q)$.

Noi sappiamo che se l'equazione della retta è posta in forma esplicita $y = mx + q$, allora il coefficiente angolare lo sappiamo determinare, bisogna avere solo occhio!

Se la retta è scritta nella forma implicita $ax + by + c = 0$, quale sarà il coefficiente angolare? Bisogna essere furbi, la retta sicuramente non sarà verticale e quindi $b \neq 0$ e dalla forma implicita scriveremo $by = -ax - c \implies y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$.

L'ultima relazione ci fa scoprire che se noi abbiamo una retta scritta in forma implicita, allora il suo coefficiente angolare vale $m = -\frac{a}{b}$ e la retta interseca l'asse delle ordinate nel punto $P \equiv \left(0, -\frac{c}{b}\right)$.

Mi sembra una cosa abbastanza ovvia, se io chiedessi... Quando accade che due rette sono parallele? Ci pensiamo un attimo e la risposta più ovvia è quella che contempla la condizione che i coefficienti angolari delle rette siano uguali. La risposta è giusta!

Vale la seguente:

Proposizione 1. *Due rette $ax + by + c = 0$ e $ax + by + c = 0$ sono parallele se e solo se i coefficienti angolari sono uguali.*

Esempio 1. *Le rette $2x - 3y + 1 = 0$ e $x - y + 1 = 0$ non sono parallele, lo sono le rette $x - 3y + 2 = 0$ e $x - 3y + 5 = 0$.*

Ora sappiamo riconoscere quando due rette sono parallele. La relazione di *parallelismo* è importante nell'insieme delle rette. Esiste un'altra relazione importante tra rette del piano, essa è la relazione di *ortogonalità*. Mi sembra ovvio chiedersi quando due rette del piano cartesiano sono tra di loro ortogonali. La risposta a tale quesito è data dalla seguente:

Proposizione 2. *Due rette $r : y = mx + q$ e $s : y = mx + q'$ sono perpendicolari se e solo se i coefficienti angolari sono antireciproci.*

Cosa vuol dire che due numeri sono antireciproci? Vuol dire che il loro prodotto fa $-1!!!$

L'antireciproco di $-\frac{1}{3}$ è 3, l'antireciproco di -1 e 1 e l'antireciproco di 2 e $-\frac{1}{2}!!$ Dovete buttare il numero a testa in giù e cambiare di segno.

Della precedente proposizione ci limitiamo a dimostrare che se due rette sono ortogonali, allora i loro coefficienti angolari sono antireciproci (vale anche l'inverso, ovvero se i coefficienti angolari di due rette sono l'uno l'antireciproco dell'altro, allora le rette sono ortogonali tra di loro). Supponiamo che le rette abbiano equazione $r : y = mx + q$ e $s : y = m'x + q'$ e che siano ortogonali, allora le rette $r' : y = mx$ e $s' : y = m'x$ sono anch'esse sono ortogonali

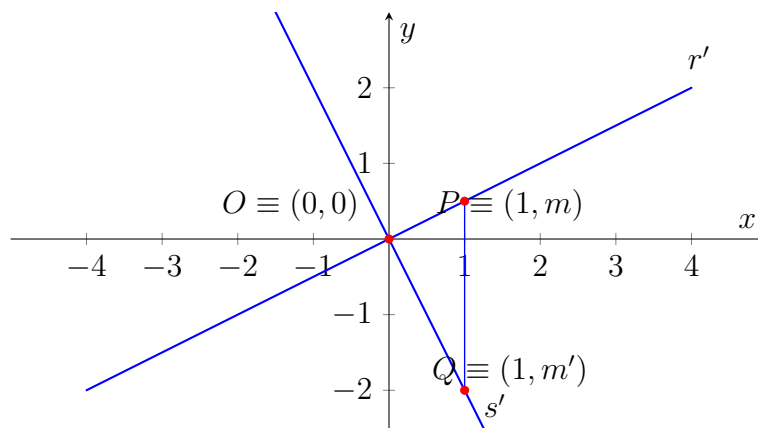


Figura 1: Rappresentazione delle rette $y = mx$ e $y = m'x$

perchè conservano il medesimo coefficiente angolare e quindi la medesima direzione. Possiamo solo dire che le ultime due rette sono ortogonali e passano per l'origine del sistema di riferimento.

Dimostrazione. Consideriamo l'ascissa $x = 1$, allora il punto P di r' avrà coordinate $P \equiv (1, m)$ e il punto Q di s' avrà coordinate $Q \equiv (1, m')$. Il triangolo $\triangle POQ$ è un triangolo rettangolo, con angolo retto in O .

Vale il teorema di Pitagora e quindi $\overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 = \overline{PQ}^2$.

Utilizzando la formula per calcolare la distanza tra due punti:

$$\overline{OP} = \sqrt{1 + m^2}$$

$$\overline{OQ} = \sqrt{1 + m'^2}$$

$$\overline{PQ} = |m' - m|$$

Dalla relazione sul teorema di Pitagora si ottiene:

$$1 + m^2 + 1 + m'^2 = (m' - m)^2 \implies 1 + m^2 + 1 + m'^2 = m'^2 - 2m'm + m^2 \implies 2 = -2m'm$$

Concludiamo che se due rette sono ortogonali, allora $m'm = -1$,

In maniera equivalente possiamo dire:

$$m' = -\frac{1}{m}$$

□

Esempio 2. Le rette $2x - 3y + 1 = 0$ e $3x + 2y - 5 = 0$ sono ortogonali perchè la prima ha coefficiente $m = \frac{2}{3}$ e la seconda ha coefficiente $m' = -\frac{3}{2}$.

Esempio 3. Le rette $4x - 3y + 1 = 0$ e $4x - 3y + 4 = 0$ sono parallele perchè la prima ha coefficiente $m = \frac{4}{3}$ e la seconda ha coefficiente $m' = \frac{4}{3}$.

Osservazione 1. Ricordate che due rette sono PARALLELE se e solo se i coefficienti angolari sono UGUALI, ovvero $m' = m$. Due rette sono PERPENDICOLARI se e solo se i coefficienti angolari sono ANTIRECIPROCI, ovvero $m' = -\frac{1}{m}$. Ricordatevi che io l'ho detto!!!