

Appunti di Geometria Euclidea

Liceo Assteas -Buccino-

25 Settembre 2023

1 Congruenza nei triangoli

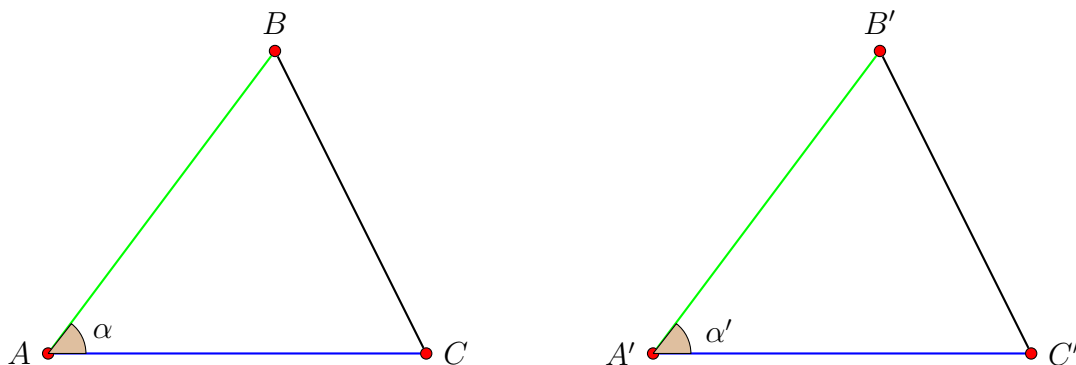
In questa breve nota mi faceva piacere riportare gli argomenti esposti in questa prima fase dedicata alla geometria euclidea. Vi ricordo che tutto l'impianto è stato formalizzato circa 2000 anni fa con il contributo del grande geometra Euclide. La presentazione delle nozioni non ha pretesa di completezza, sono solo gli appunti degli argomenti significativi esposti in questo periodo.

Definizione 1. Due figure F_1 e F_2 le diremo congruenti se sono sovrapponibili mediante dei movimenti di rotazione, traslazione e riflessione; in tal caso scriveremo $F_1 \cong F_2$.

I soggetti di questa prima sezione sono i triangoli, tutti concordano che gli elementi che caratterizzano un triangolo sono i tre lati e i tre angoli. Se volessi affermare che due triangoli sono congruenti dovrei confrontare i sei elementi in gioco; i tre lati e i tre angoli. Per fortuna ci sono alcuni **Criteri di congruenza** che ci permettono di dire che due triangoli sono congruenti senza confrontare tutti e sei gli elementi ma solo una parte.

Primo criterio di congruenza

Se due triangoli hanno rispettivamente congruenti due lati e l'angolo tra essi compreso, allora sono congruenti.

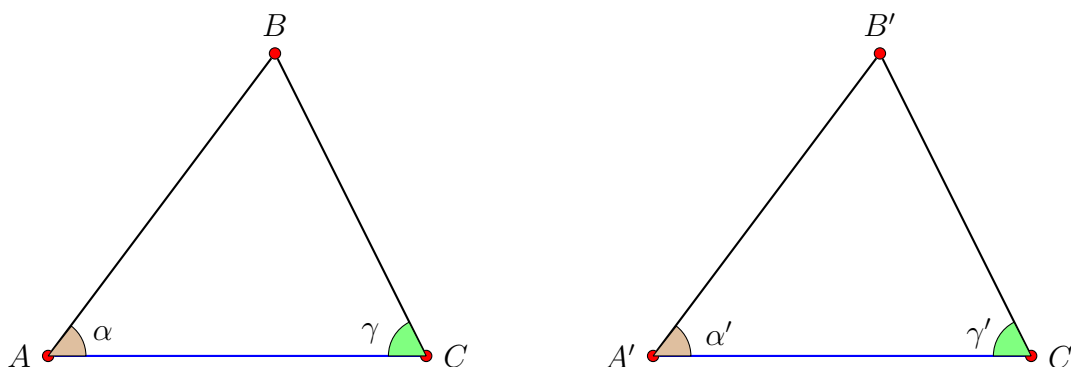


Hp: $AB \cong A'B'$; $AC \cong A'C'$; $\alpha \cong \alpha'$ **Th:** $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

Dimostrazione. Non si tratta di una vera e propria dimostrazione, bisogna solo constatare che sovrapponendo il lato AB con il lato A'B' e il lato AC con il lato A'C' per forza di cose, visto che $\alpha \cong \alpha'$, il lato BC deve coincidere con B'C'. Di conseguenza tutti i lati sono congruenti e anche tutti gli angoli e i due triangoli saranno congruenti. Questa più che una dimostrazione è un'osservazione. Potremmo dire che il *Primo Criterio di Congruenza* è in realtà un *Postulato*. \square

Secondo criterio di congruenza

Se due triangoli hanno rispettivamente congruenti un lato e i due angoli ad esso adiacenti, allora sono congruenti.



Hp: $AC \cong A'C'$; $\alpha \cong \alpha', \gamma \cong \gamma'$ **Th:** $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

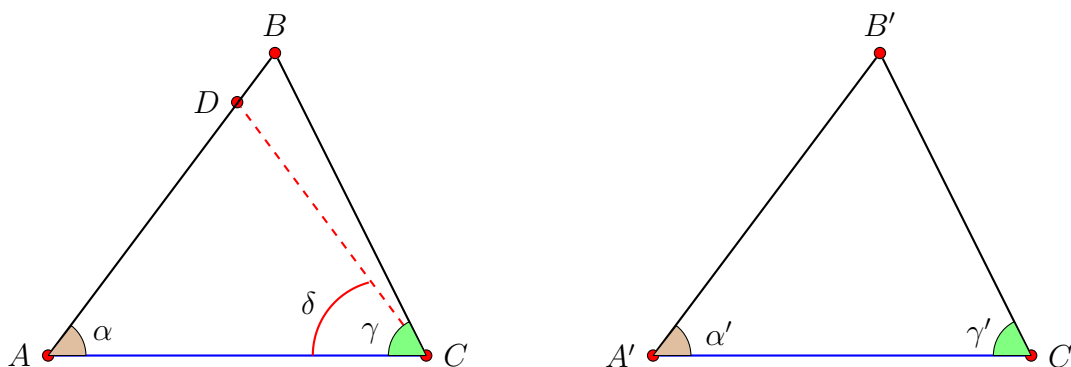
Dimostrazione. Se noi sovrapponiamo il segmento $A'C'$ con AC , cosa fattibile perchè congruenti per ipotesi, poichè $\alpha \cong \alpha'$ si possono presentare due casi:

- B' coincide con B
- B' non coincide con B

Se B' coincide con B la dimostrazione è conclusa perchè si ricade nelle condizioni del *Primo criterio di congruenza*. Abbiamo $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$; $\alpha \cong \alpha'$ e dunque $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Se invece siamo sfortunati B' non coincide con B , in tal caso deve accadere che una delle due condizioni: $AB > A'B'$ o $AB < A'B'$. Supponiamo che sia $AB > A'B'$, allo stesso modo si ragiona nel caso sia $AB < A'B'$.

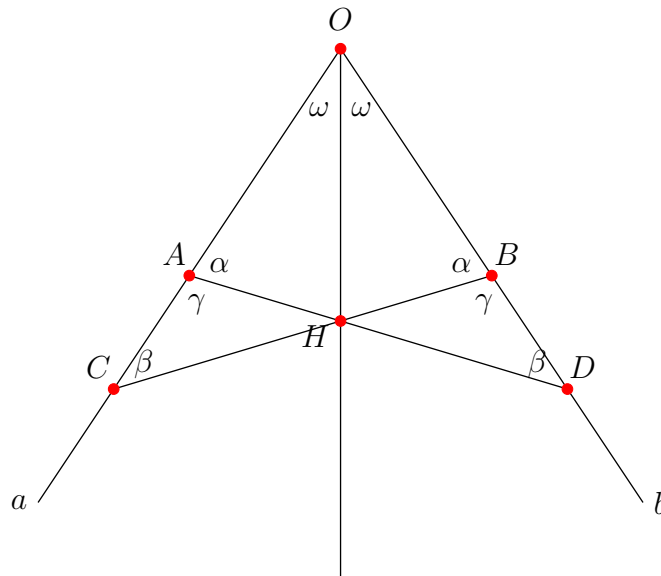
Poichè $AB > A'B'$, allora esiste un punto D su AB con $AD \cong A'B'$:



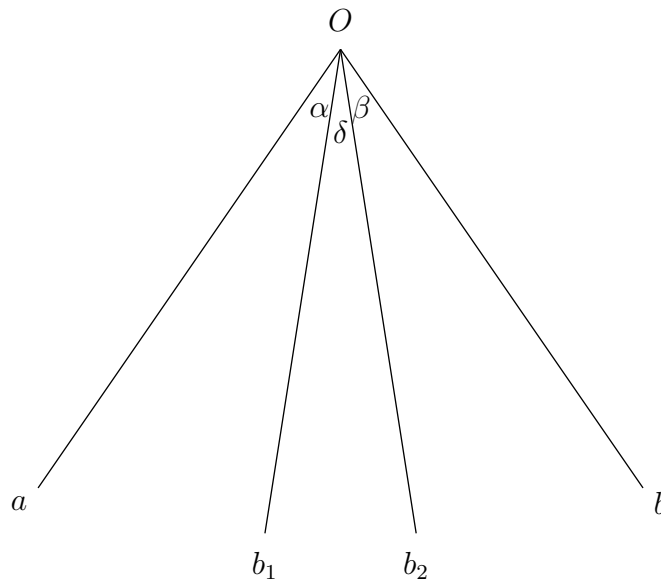
I triangoli $\triangle ADC$ e $\triangle A'B'C'$ sono congruenti per il **Primo criterio di congruenza** perchè $AD \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ e $\alpha \cong \alpha'$. L'assurdo nasce in quanto, per le ultime cose dette, $\delta \cong \gamma'$. Sappiamo per ipotesi che $\gamma \cong \gamma'$ e non è possibile perchè è come dire che $\delta \cong \gamma$.

□

Proposizione 2. *La bisettrice di un qualsiasi angolo esiste ed è unica.*

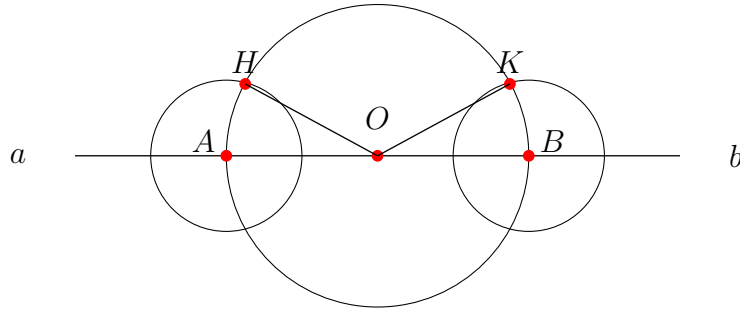


Dimostrazione. Abbiamo due semirette a e b che hanno origine comune in O ed esse formano l'angolo \widehat{AOB} . Consideriamo due punti A e B sulle due semirette in modo tale che $OA \cong OB$, questa cosa si può realizzare con un compasso centrato in O e raggio $r > 0$. Consideriamo ulteriori due punti su a e b che chiamiamo C e D in modo tale $AC \cong AD$ (con il solito compasso centrato in A e B e raggio $r > 0$). Congiungiamo A con D e B con C . Indichiamo con H l'intersezione tra i segmenti appena menzionati. Dimosteremo che la semirette di origine O e passante per H è la bisettrice dell'angolo \widehat{AOB} . Osserviamo intanto che i triangoli $\triangle OAD$ e $\triangle OBC$ hanno l'angolo in O in comune, $OA \cong OB$ e $OC \cong OD$ per costruzione e quindi sono congruenti in virtù del *Primo Criterio di Congruenza*. I triangoli $\triangle BDH$ e $\triangle ACH$ sono congruenti in virtù del *Secondo Criterio di Congruenza*. Poichè $AH \cong BH$, allora i triangoli $\triangle OAH$ e $\triangle OBH$ sono congruenti in virtù del *Primo Criterio di Congruenza*. Quest'ultima deduzione comporta che $\widehat{AOH} \cong \widehat{BOH} = \omega$ e quindi abbiamo dimostrato l'esistenza della bisettrice. Ora proveremo anche la sua unicità!



Supponiamo che esistano due bisettrici b_1 e b_2 dell'angolo in \widehat{O} , allora poichè b_1 è bisettrice $\alpha \cong \delta + \beta$; sappiamo anche che b_2 è bisettrice e quindi $\beta \cong \delta + \alpha$. Dalle ultime relazioni scritte se sommiamo membro a membro le relazioni otteniamo $\alpha + \beta \cong 2\delta + \alpha + \beta$, allora $2\delta = 0$ e quindi $\delta = 0$ e b_1 coincide con b_2 . Ottenuta l'unicità la dimostrazione dell'asserto è concluso. \square

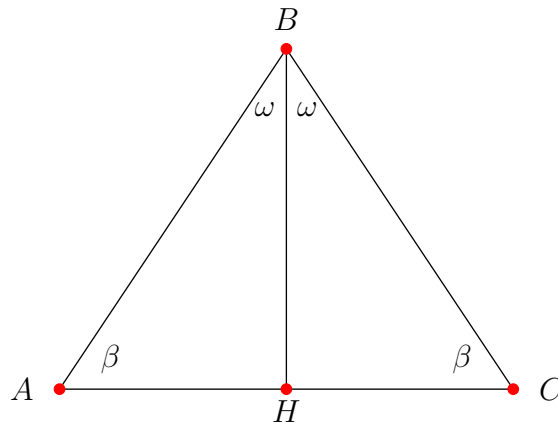
Osservazione 1. *La bisettrice dell'angolo convesso è anche bisettrice dell'angolo concavo. Se l'angolo è piatto di origine O vi dovete costruire un opportuno angolo convesso con origine O e la bisettrice di tale angolo sarà la bisettrice dell'angolo piatto.*



Nella figura in alto l'angolo \widehat{AOB} è piatto e vi costruite utilizzando il compasso l'angolo convesso \widehat{HOK} ; la bisettrice di quest'ultimo angolo è anche bisettrice dell'angolo piatto!

Definizione 3. *Un triangolo $\triangle ABC$ lo diremo isoscele se ha due lati congruenti. L'angolo formato dai due lati congruenti si dice angolo al vertice, il lato opposto all'angolo al vertice si dice base. Gli angoli adiacenti alla base si dicono appunto angoli alla base.*

Proposizione 4. *Se un triangolo $\triangle ABC$ è isoscele, allora gli angoli alla base sono congruenti.*

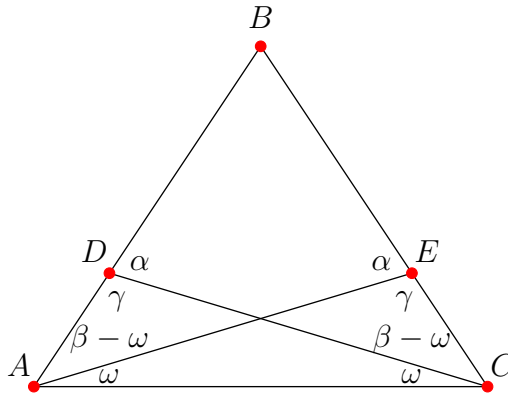


Hp: $AB \cong BC$; **Th:** $\widehat{BAC} \cong \widehat{BCA}$

Dimostrazione. E' sufficiente considerare la bisettrice BH dell'angolo \widehat{ABC} , accade che il triangolo $\triangle ABH$ è congruente al triangolo $\triangle CBH$; quest'ultimi hanno BH in comune, i lati $AB \cong CB$ per ipotesi, gli angoli $\widehat{ABH} \cong \widehat{CBH}$ perchè BH è bisettrice; essi sono congruenti in virtù del *Primo Principio di Congruenza*, segue che $\widehat{BAC} \cong \widehat{BCA}$. □

Vale anche l'inverso dell'enunciato precedente:

Proposizione 5. *In un triangolo $\triangle ABC$ se gli angoli alla base sono congruenti, allora esso è un triangolo isoscele.*



Hp: $\widehat{BAC} \cong \widehat{BCA}$; **Th:** $AB \cong BC$

Dimostrazione. Consideriamo due punti D ed E rispettivamente su AB e BC in modo che $AD \cong CE$. I triangoli $\triangle ADC$ e $\triangle CEA$ sono congruenti per il *Primo Criterio di Congruenza* in quanto hanno AC in comune, $AD \cong CE$ per costruzione e gli angoli $\widehat{DAC} \cong \widehat{ECA} \cong \beta$ congruenti per ipotesi. Da questo consegue, per il *Secondo Criterio di Congruenza*, che i triangoli $\triangle AEB$ e $\triangle CDB$ sono congruenti e quindi $AB \cong CB$. □

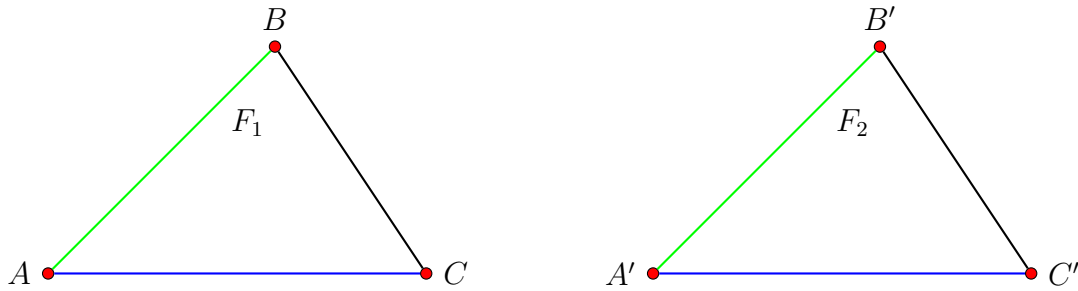
Dalle precedenti due proposizione possiamo enunciare la seguente:

Proposizione 6. *Un triangolo $\triangle ABC$ ha due lati uguali se e solo se ha due angoli uguali.*

Ora enunciamo e dimostriamo il seguente:

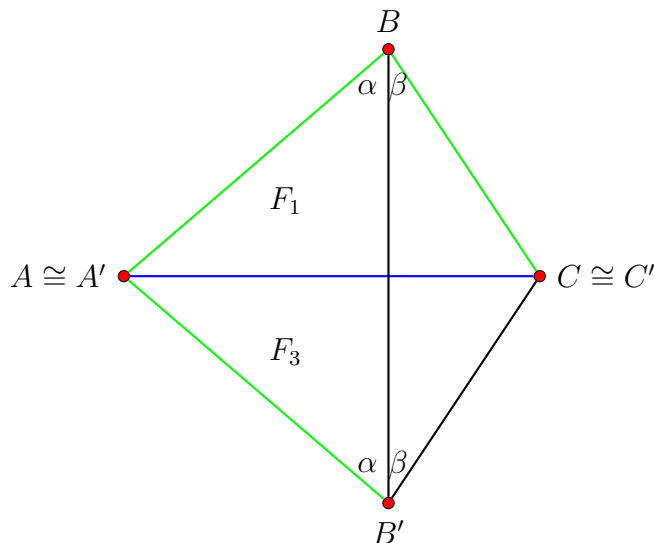
Terzo criterio di congruenza

Se due triangoli hanno rispettivamente congruenti i tre lati, allora sono congruenti.



Hp: $AB \cong A'B'$; $AC \cong A'C'$; $BC \cong B'C'$ **Th:** $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

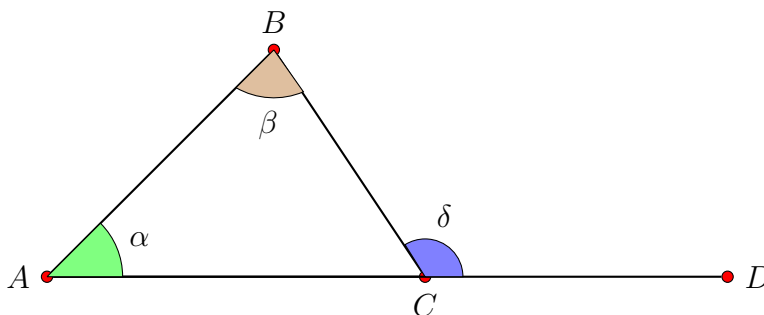
Dimostrazione. Sappiamo che i due triangoli hanno tre coppie di lati congruenti. Poichè $AC \cong A'C'$ mediante un movimento di *rotazione, traslazione e riflessione* possiamo "incollare" il triangolo F_2 al triangolo F_1 sul lato AC e otteniamo la seguente figura:



Ora dimostreremo che i triangoli F_1 e F_3 sono congruenti, poichè $F_2 \cong F_2$ allora per la proprietà transitiva avremo la tesi ovvero $F_1 \cong F_2$. Congiungiamo B con B' , risulta evidente che i triangoli $\triangle ABB'$ e $\triangle CBB'$ sono isosceli per costruzione. Dunque gli angoli alla base sono congruenti per quanto detto nella precedente proposizione; dunque $\widehat{ABC} \cong \widehat{AB'C}$ perchè si ottengono come somma di angoli congruenti, allora i i triangoli F_1 e F_3 sono congruenti per il *Primo Criterio di Congruenza* e quindi la tesi. □

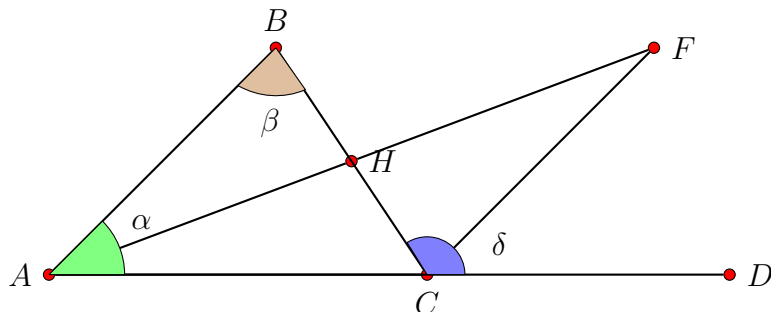
Vediamo ora le relazioni che esistono tra un angolo esterno ad un triangolo e gli angoli interni, a tal proposito si dimostra la seguente:

Proposizione 7. *In un triangolo $\triangle ABC$, un qualsiasi angolo esterno è maggiore di ciascun angolo interno non adiacente ad esso.*



Hp: $\triangle ABC$ è un triangolo **Th:** $\delta > \alpha$ e $\delta > \beta$

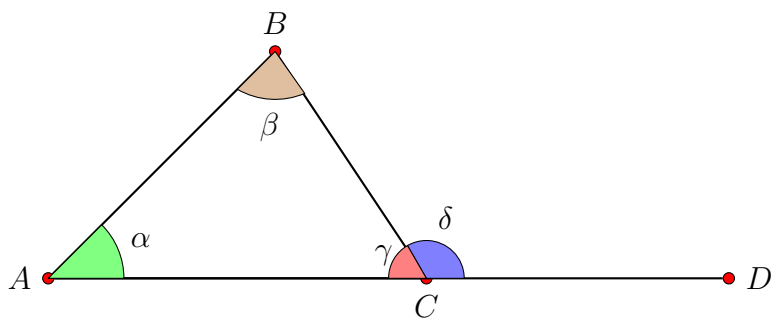
Dimostrazione. Dimostriamo che $\delta > \beta$, in maniera analoga e con le dovute variazioni si dimostra che $\delta > \alpha$. Consideriamo il punto medio H del segmento BC . Prolunghiamo il segmento AH di un segmento HF in modo tale che $HF \cong AH$. Congiungiamo il F con il vertice C del triangolo. Non ci vuole molto per comprendere che $\triangle ABH \cong \triangle FHC$, essi sono congruenti in base al *Primo Criterio di Congruenza* perché l'angolo in H opposto al vertice, $BH \cong HC$ e $AH \cong HF$ per costruzione. Da questo si deduce che $\beta \cong \widehat{HCF} < \delta$ e quindi per transitività $\beta < \delta$.



□

Dalla proposizione precedente si deduce il seguente:

Corollario 8. *La somma di due angoli interni in un triangolo $\triangle ABC$ è minore di un angolo piatto.*



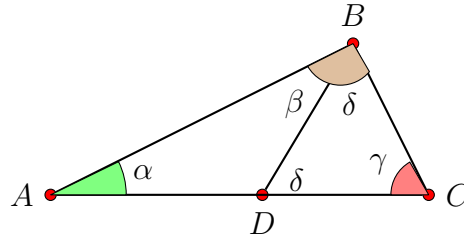
Dimostrazione.

Per la proposizione precedente sappiamo che $\delta > \alpha$, dunque $\delta + \gamma > \alpha + \gamma$ e poichè $\delta + \gamma$ è l'angolo piatto la relazione precedente si legge $\alpha + \gamma$ minore di un angolo piatto e quindi la tesi. In maniera analoga si dimostrano le altre.

□

Esiste una relazione tra lati e angoli in un triangolo $\triangle ABC$? La risposta è affermativa e si riesce a dimostrare la seguente:

Proposizione 9. *In un triangolo $\triangle ABC$ se due lati non sono congruenti, allora anche gli angoli opposti ai corrispondenti lati non sono congruenti ed è maggiore l'angolo opposto al lato maggiore.*

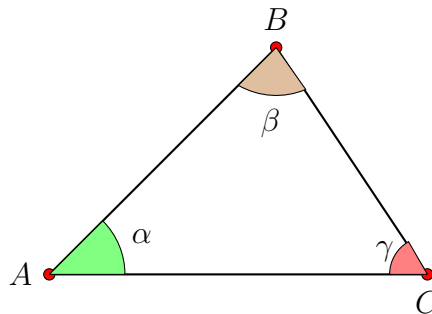


Dimostrazione.

Supponiamo che $AC > BC$, allora proveremo che $\beta > \alpha$. Poichè AB è maggiore di BC esiste un punto D su AB in modo tale che $DC \cong BC$. Il triangolo $\triangle BCD$ è isoscele con base BD ; si ha $\beta > \delta$ perchè è una parte di angolo e per il teorema sull'angolo esterno $\delta > \alpha$. Dalle ultime due relazioni si deduce $\beta > \alpha$ e quindi la tesi. \square

Vale anche l'inverso della proposizione precedente e la dimostrazione è immediata:

Proposizione 10. *In un triangolo $\triangle ABC$ se due angoli non sono congruenti, allora anche i lati opposti ai corrispondenti angoli non sono congruenti ed è maggiore il lato opposto all'angolo maggiore.*



Dimostrazione.

Supponiamo che $\beta > \alpha$, allora possiamo senza dubbi asserire che $AC > BC$. Se così non fosse allora dovrebbe risultare $AC \leq BC$.

- Se $AC = BC$, allora il triangolo è isoscele e quindi $\beta = \alpha$ ma non può essere perchè contraddice l'ipotesi.
- Se $AC < BC$, allora $\beta < \alpha$ per quanto dimostrato in precedenza e di nuovo contro l'ipotesi.

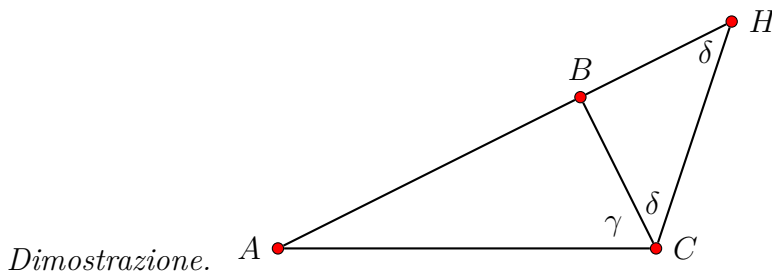
Concludiamo che deve essere $AC > BC$.

\square

Basandosi sul precedente risultato è possibile dimostrare la seguente:

Proposizione 11. In un triangolo $\triangle ABC$ la somma delle lunghezze di due lati è maggiore della lunghezza del terzo lato.

Il precedente risultato è conosciuto con la locuzione *Diseguaglianza Triangolare*.



Dimostriamo ad esempio che $AC < AB + BC$, a tal proposito prolunghiamo il lato AB di un tratto $BH \cong BC$. Osserviamo che il triangolo $\triangle BHC$ è isoscele in quanto $BH \cong BC$ per costruzione. Indichiamo con δ gli angoli alla base. Risulta evidente che $\gamma + \delta > \delta$, allora in base alla proposizione precedente, possiamo asserire che $AC < AH$ ovvero $AC < AB + BC$. e quindi la tesi.

Se per qualcuno la conclusione sembra ermetica vi ricordo che $AH = AB + BH$ e poichè $BH = BC$, allora $AH = AB + BC$. □

La proposizione precedente in sostanza afferma che se abbiamo un triangolo $\triangle ABC$ è indichiamo con a, b, c la lunghezza dei tre lati, allora si hanno le seguenti relazioni:

- $a + b > c$
- $a + c > b$
- $b + c > a$

Le precedenti tre condizioni sono anche sufficienti per costruire un triangolo nel senso precisato dalla seguente:

Proposizione 12. Assegnati tre numeri reali positivi a, b, c con $a + b > c$, $a + c > b$, $b + c > a$ esiste un unico triangolo con i lati che hanno lunghezza rispettivamente a, b e c .

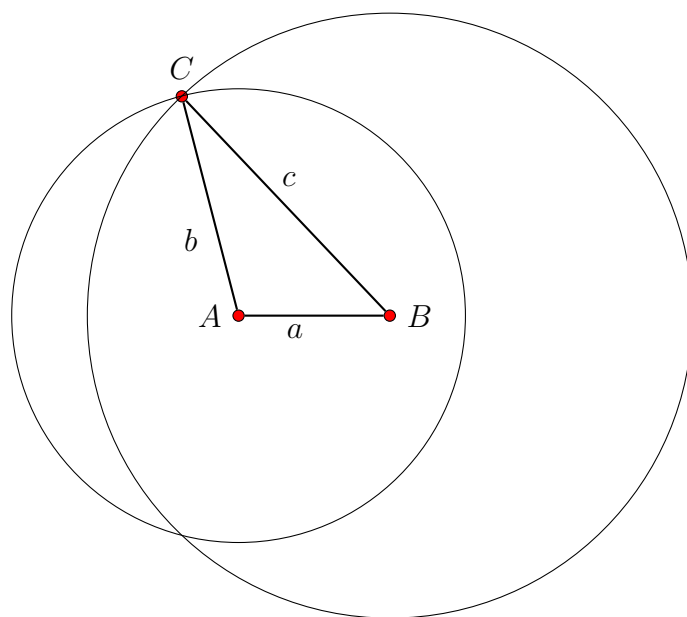
Metodo algebrico

Prendete due segmenti AB e BC di lunghezza rispettivamente a e b e li "incollate" in un estremo, ad esempio A . Ora dovete "attaccare" il segmento AC sugli estremi B e C . Avete solo un modo per riuscirci, dovete variare l'angolo che formano i segmenti AB e AC . In che modo si sceglie l'angolo? Si sceglie l'angolo tenendo conto della seguente relazione:

$$\cos \alpha = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \text{ (qualcosa che studierete in futuro!).}$$

Metodo geometrico

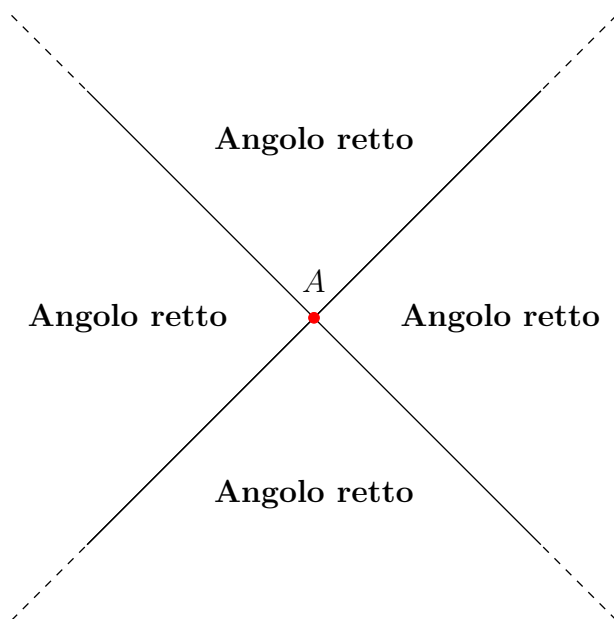
C'è anche una costruzione geometrica. Prendete un segmento AB di lunghezza a , nell'estremo A costruite una circonferenza di raggio b e nell'altro estremo B costruite una circonferenza di raggio c . Queste due circonferenze si intersecano in un punto C . Congiungete C con A e C con B e avete il vostro triangolo di lati a , b e c .



2 Rette perpendicolari e rette parallele

Prima di passare al risultato principale che esporremo in questa nota, possiamo dare la seguente:

Definizione 13. *Due rette del piano r_1 e r_2 si dicono ortogonali o perpendicolari se incidendosi in un punto A formano quattro angoli uguali.*



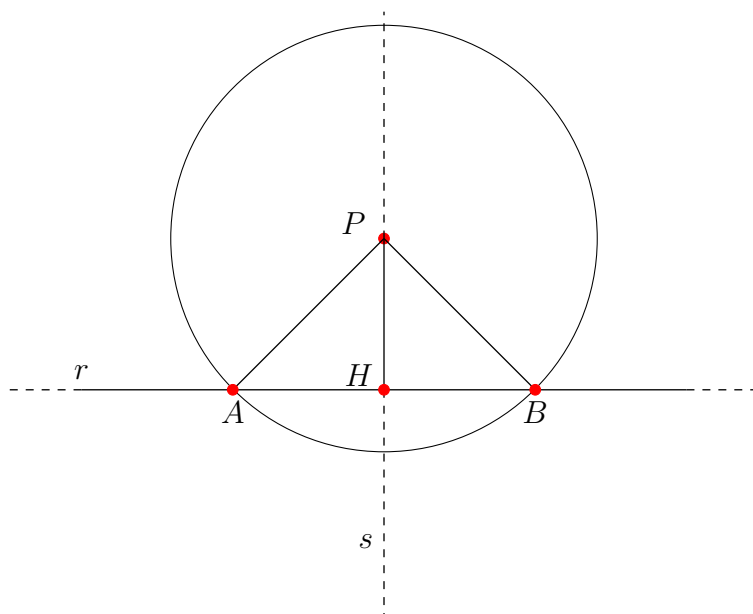
Ora enunciamo la seguente:

Proposizione 14. *Assegnati nel piano una retta r e un punto P esiste un'unica retta s passante per P ed ortogonale a r .*

Dimostrazione. Nel fare la dimostrazione procederemo in due modi:

- **Caso a)** Il punto P non appartiene a r .
- **Caso b)** Il punto P appartiene a r .

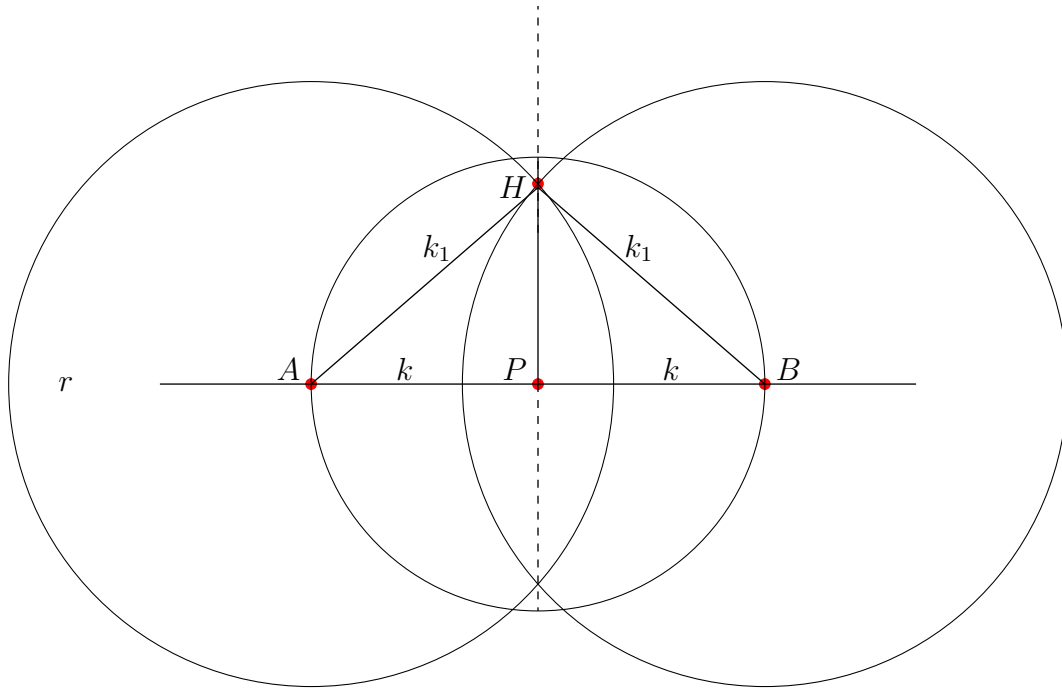
Vediamo il **Caso a)**



Con il compasso centrato in P costruiamo una circonferenza di centro P e raggio $k > 0$ che possa intersecare la retta r . Indichiamo con A e B i due punti di intersezione, successivamente congiungiamo A con P e B con P . Non ci sono dubbi che il triangolo $\triangle APB$ è un triangolo isoscele in quanto due lati coincidono con i raggi della circonferenza. La bisettrice dell'angolo \widehat{APB} prolungata dalla parte di P e di H è la retta s cercata in quanto essa è mediana e in particolare altezza del triangolo $\triangle APB$.

Vediamo il Caso b)

In questa situazione creeremo le condizioni per ricadere nel **caso a)**.

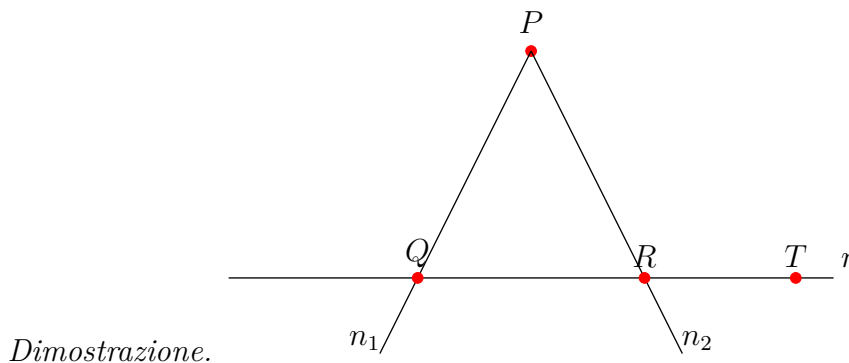


Con il compasso centrato in P costruiamo una circonferenza di centro P e raggio $k > 0$, essa interseca la retta r nei punti A e B . Con il compasso centrato in A costruiamo una circonferenza di raggio $k_1 > k$ e allo stesso modo centrando il compasso in B costruiamo una circonferenza di raggio $k_1 > k$. Queste ultime due circonferenze si intersecano in due punti distinti che non appartengono a r , uno di essi è il punto H . Il triangolo $\triangle AHB$ è isoscele per costruzione in quanto due lati coincidono con i raggi delle circonferenze di raggio k_1 . Ora per H facciamo esattamente quello che abbiamo fatto per P nel caso precedente.

□

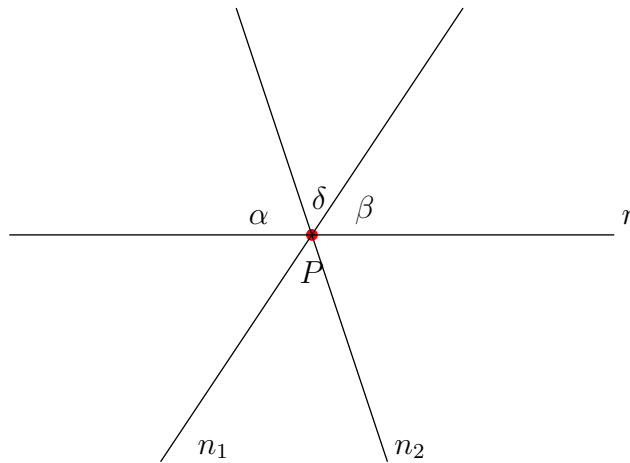
Dimostrazione unicità della perpendicolare in entrambi i casi

Vediamo il Caso a)



Supponiamo per assurdo che n_1 e n_2 siano due perpendicolari distinte per P ad r . Si forma il triangolo $\triangle PQR$, abbiamo studiato che l'angolo esterno \widehat{PRT} deve essere maggiore dell'angolo \widehat{PQR} . Quest'ultima cosa non vale perchè angoli \widehat{PRT} e \widehat{PQR} sono congruenti e pari alla metà di un angolo piatto perchè abbiamo supposto le rette n_1 e n_2 ortogonali a r . L'assurdo è nato perchè abbiamo supposto l'esistenza di due perpendicolari

Vediamo il Caso b)

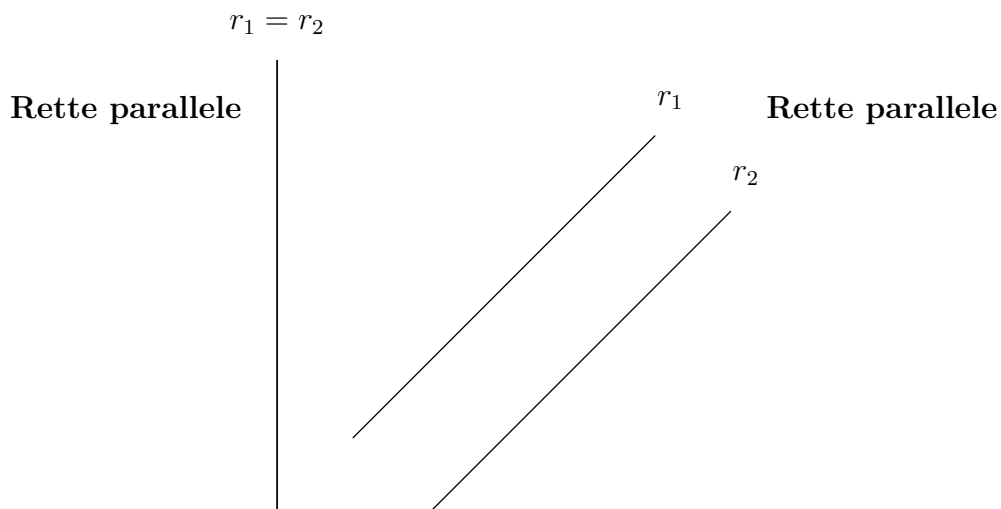


Supponiamo che n_1 e n_2 siano due perpendicolari distinte per P ad r . Poichè n_1 e n_2 sono ortogonali, allora $\alpha + \beta$ deve essere congruente ad un angolo piatto e questo vuol dire che $\delta \cong 0$, allora n_1 deve coincidere con n_2 .

□

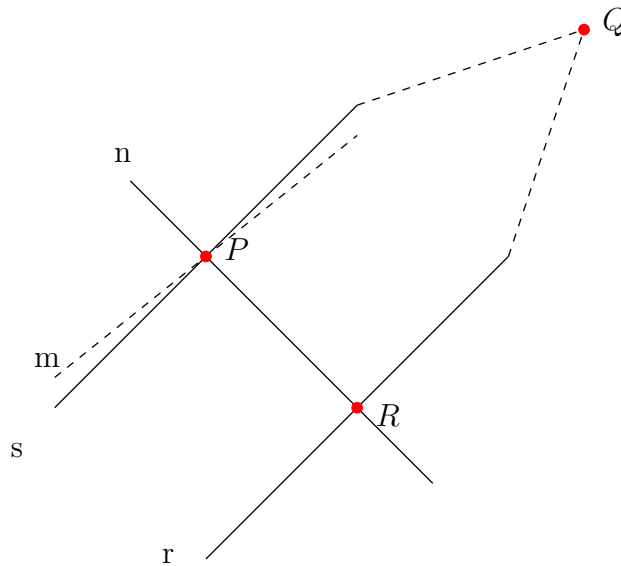
Prima di passare al risultato principale che esporremo in questa nota, possiamo dare la seguente:

Definizione 15. Due rette del piano r_1 e r_2 si dicono parallele se sono coincidenti o se non hanno punti in comune.



Ora enunciamo la seguente:

Proposizione 16. Assegnati nel piano una retta r e un punto $P \notin r$, esiste una retta s passante per P e parallela a r .



Dimostrazione. In primo luogo si conduce una retta n per P ortogonale a r che la interseca nel punto R . Successivamente si costruisce la retta s per P ortogonale a n . La retta s sarà la parallela di r perché se per assurdo r ed s si incidessero in un punto Q , avrei costruito per Q due perpendicolari distinte, r e s , alla retta n . Abbiamo provato precedentemente che per un punto esterno si può costruire un'unica perpendicolare. L'assurdo che si è presentato dimostra che r ed s sono parallele.

□

La precedente proposizione somiglia molto alla proposizione relativa alla retta perpendicolare:

Proposizione 17. *Assegnati nel piano una retta r e un punto P , esiste un'unica retta s passante per P e perpendicolare a r .*

La differenza sta nell'unicità della retta s , mentre la perpendicolare è unica l'unicità della parallela non è garantita.

Osservazione 2. *Una parallela si riesce a costruire come abbiamo visto, nulla invece si può dire riguardo all'essere unica. La retta s per R che è ortogonale è certamente unica e abbiamo provato che è parallela ad r . Ma essa è l'unica parallela o esistono altri metodi con i quali se ne possono costruire altre? Se vogliamo dimostrare che s è l'unica si dovrebbe provare che una qualsiasi parallela m ad r dovrebbe necessariamente coincidere con s .*

Per dire che s è l'unica parallela ad r bisognerebbe provare la seguente:

Proposizione 18. *Sia m una retta per P parallela ad r , allora m deve coincidere con s .*

Gli assiomi e le proposizioni della Geometria Euclidea non permettono di ottenere l'unicità della parallela. La questione si risolve ammettendo tale unicità come un fatto non dimostrabile e quindi si enuncia il seguente:

Postulato sulle Parallele Assegnati nel piano una retta r e un punto P , esiste un'unica retta s passante per P ed ortogonale a r .

A dire il vero il **Postulato sulle Parallele** originariamente non aveva la forma appena menzionata, quando Euclide scrisse gli *Elementi* enunciò cinque postulati che di seguito elenchiamo:

1. Per due punti distinti passa una e una sola retta.
2. Una retta può essere prolungata indefinitamente.

3. Assegnati un punto e una lunghezza si può descrivere una circonferenza.
4. Tutti gli angoli retti sono congruenti.
5. Se due rette incontrano una terza retta e formano dalla stessa parte angoli interni minori di un angolo piatto, allora esse si incontreranno dalla parte di tali angoli.

Il quinto di questi postulati è la sua forma originale, la forma che abbiamo menzionato precedentemente corrisponde a quella che fu data dal matematico inglese *John Playfair* che la pubblicò nel 1795. Il quinto postulato di *Euclide* e l'enunciato di *Playfair* sono equivalenti.

Per circa 2000 anni i matematici cercarono di dimostrare il *Quinto postulato o Postulato sulle Parallele*, una dimostrazione di tale postulato equivaleva in realtà a dimostrare l'unicità della retta parallela. Ogni tentativo fu invano e non portava alla conclusione voluta. Il padre gesuita **Gerolamo Saccheri (1667-1733)** fece un tentativo di dimostrarlo per assurdo. Che cosa significa dimostrarlo per assurdo?

Nel postulato si asserisce che la retta ESISTE ed è UNICA. Ragionare per assurdo vuol dire negare la tesi e quindi supporre che a) NON ESISTONO PARALLELE o b) ESISTE PIU' DI UNA RETTA PARALLELA. Il ragionamento non portava da nessuna parte ma apriva un nuovo mondo di vedere le cose. Si comprendeva che l'unicità della parallela non poteva essere dedotta dagli assiomi e dai risultati conseguite all'interno della *Geometria Euclidea*. Il padre gesuita con la negazione della tesi, a) NON ESISTONO PARALLELE o b) ESISTE PIU' DI UNA RETTA PARALLELA, buttava le basi per la costruzione di nuove geometrie che furono dette *GEOMETRIE NON EUCLIDEE*:

- a) NON ESISTONO PARALLELE **Geometria Ellittica**.
- b) ESISTE PIU' DI UNA RETTA PARALLELA **Geometria Iperbolica**.

Definizione 19. Due rette r_1 e r_2 , non necessariamente parallele, tagliate da una trasversale t individuano otto angoli, che vengono denotati nel seguente modo:

- Angoli alterni interni
- Angoli alterni esterni
- Coniugati interni
- Coniugati esterni
- Angoli corrispondenti

Sopra dovrò fare un disegno che riporta tale configurazione....

A questo punto si può enunciare la seguente:

Proposizione 20. Se rette r_1 e r_2 parallele sono tagliate da una trasversale t , allora si verificano le seguenti condizioni:

- Gli angoli alterni interni sono congruenti
- Gli angoli alterni esterni sono congruenti
- Gli angoli coniugati interni sono supplementari
- Gli angoli coniugati esterni sono supplementari
- Gli angoli corrispondenti sono congruenti

La cosa interessante è che ciascuna delle ultime condizioni è sufficiente per dire che due rette r_1 e r_2 siano parallele. In altre parole si afferma che vale la seguente:

Proposizione 21. *Se due rette r_1 e r_2 tagliate da una trasversale t verificano una delle seguenti condizioni:*

- *Gli angoli alterni interni sono congruenti*
- *Gli angoli alterni esterni sono congruenti*
- *Gli angoli coniugati interni sono supplementari*
- *Gli angoli coniugati esterni sono supplementari*
- *Gli angoli corrispondenti sono congruenti*

allora si può concludere che le due rette r_1 e r_2 sono parallele .

Dimostrazione. La devo svolgere....

□

Nel passato abbiamo dimostrato che assegnato un triangolo $\triangle ABC$, allora un angolo esterno risulta essere maggiore di ciascun angolo interno non adiacente ad esso. Abbiamo anche provato che la somma di due angoli interni in un triangolo $\triangle ABC$ è minore di un angolo piatto. Avendo introdotto la nozione di retta parallela tagliate da una trasversale possiamo essere più precisi e siamo in grado di dimostrare la seguente:

Proposizione 22. *In un triangolo $\triangle ABC$ ogni angolo esterno coincide con la somma dei due angoli interni al triangolo non adiacenti ad esso.*

Dimostrazione. La devo svolgere....

□

Corollario 23. *In un triangolo $\triangle ABC$ la somma degli angoli interni è un angolo piatto.*

Dimostrazione. La devo svolgere ma è banale!

□

Corollario 24. *In un triangolo rettangolo $\triangle ABC$ gli angoli acuti sono complementari.*

Dimostrazione. Evidente che un angolo è retto, dunque la somma degli altri due deve essere 90° e di conseguenza sono complementari.

□

Nel secondo criterio di congruenza dei triangoli abbiamo asserito quanto segue:

Proposizione 25. *Secondo criterio di congruenza*

Se due triangoli hanno rispettivamente congruenti un lato e i due angoli ad esso adiacenti, allora sono congruenti.

Forti del fatto che la somma degli angoli interni in un triangolo è un angolo piatto (conseguenza del V postulato), possiamo dare una forma "più debole" del Secondo criterio di congruenza (forma debole vuol dire che facciamo richieste meno esigenti). Si dimostra la seguente:

Proposizione 26. *Secondo criterio di congruenza generalizzato*

Se due triangoli hanno rispettivamente congruenti un lato e i due angoli, allora sono congruenti.

Dimostrazione. Devo fare la dimostrazione, osservo che in questo caso si richiede che gli angoli non siano quelli adiacenti al lato congruente, quindi una richiesta più debole!

□

Osservazione 3. Tra due rette parallele r_1 e r_2 è stato possibile definire una distanza se consideriamo due punti H_1 e H_2 sulla retta r_1 e le rispettive proiezioni ortogonali K_1 e K_2 sulla retta r_2 , allora abbiamo dimostrato che $H_1K_1 \cong H_2K_2$.

Successivamente abbiamo enunciato delle condizioni sufficienti affinché due triangoli rettangoli siano congruenti e abbiamo provato la seguente:

Proposizione 27. Se per due triangoli rettangoli $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ si verifica una delle seguenti condizioni:

- Due cateti congruenti
- Un cateto e l'ipotenusa
- Un cateto e un angolo acuto
- L'ipotenusa e un angolo acuto

allora i triangoli $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ sono congruenti.

Dimostrazione. La dimostrazione è semplice e la farò con il tempo..... □

Una proposizione che può avere una certa importanza nelle applicazioni è la seguente:

Proposizione 28. In un triangolo rettangolo $\triangle ABC$ la mediana relativa all'ipotenusa è congruente a metà ipotenusa.

Dimostrazione. La dimostrazione è semplice e la farò con il tempo..... □

Definizione 29. Si dice poligono la parte di piano racchiusa da una poligonale non intrecciata chiusa.

Una prima classificazione tra i poligoni è fatta distinguendo tra poligoni *CONCAVI* e *CONVESSI*. Noi ci occuperemo di poligoni *CONVESSI*.

Definizione 30. Un poligono si dice *CONVESSO* se presi due punti A e B del poligono il segmento AB è tutto contenuto nel poligono, se questo non accade lo diremo *CONCAVO*.

Proposizione 31. Se P_n rappresenta un poligono di n lati (non necessariamente regolare, un poligono qualsiasi), allora la somma degli angoli interni α_i vale $\sum_{i=1}^n \alpha_i = (n - 2) \cdot 180^\circ$ e la

somma degli angoli esterni β_i vale $\sum_{i=1}^n \beta_i = 360^\circ$. Ricordiamo in maniera esplicita che in un poligono P_n mentre la somma degli angoli interni dipende dal numero n di spigoli o lati, al contrario la somma degli angoli esterni è costante ed è pari ad un angolo giro.

Definizione 32. Si chiama spigolo in un poligono P_n di vertici $V_1, V_2, \dots, V_{n-1}, V_n$ il segmento V_iV_j che congiunge due vertici consecutivi.

Definizione 33. Si chiama corda di un poligono P_n il segmento AB che congiunge due punti A e B appartenenti a due spigoli distinti.

Definizione 34. Si chiama diagonale di un poligono P_n il segmento V_iV_j che congiunge due vertici V_i e V_j non consecutivi.

Proposizione 35. In un poligono P_n di vertici $V_1, V_2, \dots, V_{n-1}, V_n$ il numero delle diagonali è $\frac{n \cdot (n - 3)}{2}$.

3 Quadrilateri

Definizione 36. *Si chiama quadrilatero o quadrangolo un poligono P_4 avente 4 lati.*

In un quadrilatero la somma degli angoli interni vale 360° . Si dicono *lati opposti* i due lati che non hanno punti in comune, si dicono *angoli opposti* gli angoli generati da spigoli che non sono in comune. I quadrilateri sono classificati in funzione del numero di coppie di lati paralleli che li generano.

Definizione 37. *Si chiama parallelogramma un quadrilatero che ammette due coppie di lati paralleli.*

Definizione 38. *Si chiama trapezio un quadrilatero che ammette una sola coppia di lati paralleli.*

In un generico quadrilatero non si parla di *altezza*. Ha senso parlare di altezza se nel quadrilatero esiste almeno una coppia di lati paralleli, sappiamo che in tal caso è possibile definire la distanza tra due rette parallele. Nei trapezi abbiamo un'altezza e nei parallelogrammi ne avremo in generale due. Abbiamo detto che nei trapezi c'è una sola coppia di lati paralleli, se gli altri due lati (che non sono mai paralleli!) sono congruenti, allora il trapezio si dice *trapezio isoscele*, se non sono congruenti lo diremo *trapezio scaleno* e se uno dei due lati ed uno solo è ortogonale ai due lati paralleli lo diremo *trapezio rettangolo* (la richiesta è di un solo lato obliquo ortogonale altrimenti avremmo un *rettangolo* e non invece siamo "nel mondo dei trapezi").

Ora enunciamo una proposizione che riguarda i parallelogrammi:

Proposizione 39. *Se il quadrilatero è un parallelogramma, allora valgono le seguenti condizioni:*

- *I lati opposti sono congruenti.*
- *Gli angoli opposti sono congruenti.*
- *Gli angoli consecutivi sono supplementari.*
- *Le diagonali si incidono nel loro punto medio.*

Dimostrazione. La dimostrazione la devo costruire..... □

La cosa interessante è che la proposizione precedente si inverte, ognuna delle condizioni precedenti diventa una condizione sufficiente per poter affermare che un quadrilatero sia un parallelogramma. Si dimostra la seguente:

Proposizione 40. *Se il quadrilatero verifica una delle seguenti condizioni:*

- *I lati opposti sono a due a due congruenti*
- *Gli angoli opposti sono congruenti*
- *Gli angoli consecutivi sono supplementari*
- *Le diagonali si incidono nel loro punto medio*
- *Una coppia di lati opposti sono congruenti e paralleli*

allora il quadrilatero è un parallelogramma.

Dimostrazione. La dimostrazione la devo costruire..... □

3.1 Teorema dei punti medi

La proposizione appena dimostrata sui parallelogrammi ci fornisce nuovi strumenti per poter dimostrare i seguenti risultati:

Proposizione 41. *Se in un triangolo $\triangle ABC$ si congiungono i punti medi M ed N relativi a due lati, allora il segmento MN è parallelo al terzo lato ed è lungo la metà di esso.*

Dimostrazione. La dimostrazione la devo costruire..... □

Vale anche l'inverso della proposizione precedente, in altre parole si ha la seguente:

Proposizione 42. *Se in un triangolo $\triangle ABC$ dal punto medio M di un lato si conduce la parallela ad un secondo lato, essa incide il terzo lato nel suo punto medio.*

Dimostrazione. La dimostrazione la devo costruire..... □

3.2 Particolari parallelogrammi

Definizione 43. *Si chiama rettangolo un parallelogramma con un angolo retto.*

Corollario 44. *In un rettangolo ci sono quattro angoli retti.*

Dimostrazione. La dimostrazione la devo costruire..... □

Proposizione 45. *Se un parallelogramma è un rettangolo, allora le diagonali sono congruenti.*

Dimostrazione. La dimostrazione la devo costruire..... □

La cosa interessante è che vale l'inverso della proposizione precedente, infatti possiamo enunciare la seguente:

Proposizione 46. *Se in un parallelogramma le diagonali sono congruenti, allora esso è un rettangolo.*

Dimostrazione. La dimostrazione la devo costruire..... □

Definizione 47. *Si chiama rombo un parallelogramma con due lati consecutivi congruenti.*

Corollario 48. *In un rombo ci sono quattro lati congruenti.*

Dimostrazione. La dimostrazione la devo costruire..... □

Proposizione 49. *Se un parallelogramma è un rombo, allora valgono le seguenti condizioni:*

- *Le diagonali sono ortogonali*
- *Le diagonali sono bisettrici degli angoli*

Dimostrazione. La dimostrazione la devo costruire..... □

La cosa interessante è che vale l'inverso della proposizione precedente, infatti possiamo enunciare la seguente:

Proposizione 50. *Se in un parallelogramma vale una delle seguenti condizioni:*

- *Le diagonali sono ortogonali*
- *Una diagonale è bisettrice di un angolo*

allora il parallelogramma è un rombo.

Dimostrazione. La dimostrazione la devo costruire..... □

Definizione 51. *Si chiama quadrato indifferentemente un rettangolo con due lati consecutivi congruenti o un rombo con un angolo retto.*

Proposizione 52. *Se un parallelogramma è un quadrato, allora valgono le seguenti condizioni:*

- *Le diagonali sono ortogonali e congruenti.*
- *Le diagonali sono bisettrici degli angoli.*

Dimostrazione. La dimostrazione la devo costruire..... □

La cosa interessante è che vale l'inverso della proposizione precedente, infatti possiamo enunciare la seguente:

Proposizione 53. *Se in un parallelogramma vale una delle seguenti condizioni:*

- *Le diagonali sono ortogonali e congruenti*
 - *Le diagonali sono congruenti e una di esse è bisettrice di un angolo*
- allora il parallelogramma è un quadrato.*

Dimostrazione. La dimostrazione la devo costruire..... □

3.3 Trapezi

Riprendiamo la definizione già data:

Definizione 54. *Si chiama trapezio un quadrilatero che ammette una sola coppia di lati paralleli.*

In un trapezio i lati paralleli si chiamano *basi*, gli altri due lati si dicono *lati obliqui*.

Proposizione 55. *In un trapezio gli angoli adiacenti ad uno stesso lato obliquo sono supplementari.*

Dimostrazione. La dimostrazione la devo costruire..... □

Ora enunciamo delle proprietà che caratterizzano i *trapezi isosceli*. Vale la seguente:

Proposizione 56. *In un trapezio isoscele valgono le seguenti condizioni:*

- *Gli angoli adiacenti a ciascuna base sono congruenti.*
- *Gli angoli opposti sono supplementari.*
- *Le diagonali sono congruenti.*

Dimostrazione. La dimostrazione la devo costruire..... □

Vale la proposizione inversa di quella precedente:

Proposizione 57. *Se in un trapezio vale una delle seguenti condizioni:*

- *Gli angoli adiacenti a ciascuna base sono congruenti.*
- *Gli angoli opposti sono supplementari.*
- *Le diagonali sono congruenti.*

allora il trapezio è isoscele.

Dimostrazione. La dimostrazione la devo costruire..... □