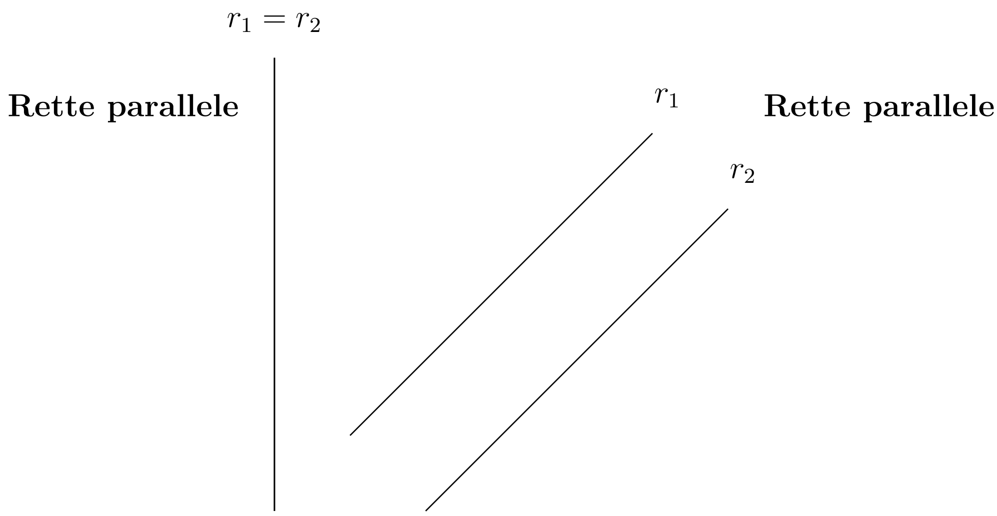
Nota sulla retta parallela

Liceo "Wiligeolmo"-Modena-

F. Fernicola 18 Gennaio 2022

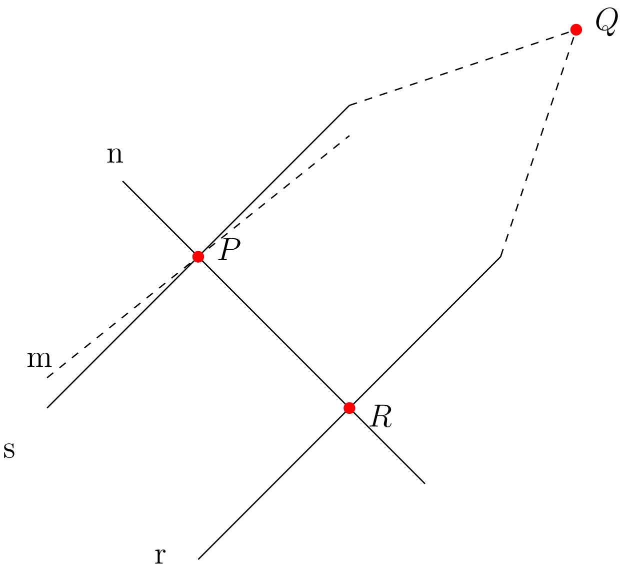
Prima di passare al risultato principale che esporremmo in questa nota, possiamo dare la seguente:

Definizione 1. *Due rette del piano* r_1 *e* r_2 *si dicono* parallele *se sono coincidenti o se non hanno punti in comune.*



Ora enunciamo la seguente:

Proposizione 2. *Assegnati nel piano una retta* r *e un punto* $P \notin r$*, esiste una retta* s *passante per* P *e parallela a* r*.*



Dimostrazione. In primo luogo si conduce una retta n per P ortogonale a r che la interseca nel punto R. Successivamente si costruisce la retta s per P ortogonale a n. La retta s sarà la parallela di r perché se per assurdo r ed s si incidessero in un punto Q, avrei costruito per Q due perpendicolari distinte, r e s, alla retta n. Abbiamo provato precedentemente che per un punto esterno si può costruire un'unica perpendicolare. L'assurdo che si è presentato dimostra che r ed s sono parallele.

$\square$

La precedente proposizione somiglia molto alla proposizione relativa alla retta perpendicolare:

Proposizione 3. *Assegnati nel piano una retta r e un punto P, esiste un'unica retta s passante per P e perpendicolare a r.*

La differenza sta nell'unicità della retta s, mentre la perpendicolare è unica l'unicità della parallela non è garantita.

Osservazione 1. *Una parallela si riesce a costruire come abbiamo visto, nulla invece si può dire riguardo all'essere unica. La retta s per R che è ortogonale è certamente unica e abbiamo provato che è parallela ad r. Ma essa è l'unica parallela o esistono altri metodi con i quali se ne possono costruire altre? Se vogliamo dimostrare che s è l'unica si dovrebbe provare che una qualsiasi parallela m ad r dovrebbe necessariamente coincidere con s.*

Per dire che s è l'unica parallela ad r bisognerebbe provare la seguente:

Proposizione 4. *Sia m una retta per P parallela ad r, allora m deve coincidere con s.*

Gli assiomi e le proposizioni della Geometria Euclidea non permettono di ottenere l'unicità della parallela. La questione si risolve ammettendo tale unicità come un fatto non dimostrabile e quindi si enuncia il seguente:

Postulato sulle Parallele Assegnati nel piano una retta r e un punto P, esiste un'unica retta s passante per P ed ortogonale a r.

A dire il vero il **Postulato sulle Parallele** originariamente non aveva la forma appena menzionata, quando Euclide scrisse gli *Elementi* enunciò cinque postulati che di seguito elenchiamo:

1. Per due punti distinti passa una e una sola retta.
2. Una retta può essere prolungata indefinitamente.
3. Assegnati un punto e una lunghezza si può descrivere una circonferenza.
4. Tutti gli angoli retti sono congruenti.
5. Se due rette incontrano una terza retta e formano dalla stessa parte angoli interni minori di un angolo piatto, allora esse si incontreranno dalla parte di tali angoli.

Il quinto di questi postulati è la sua forma originale, la forma che abbiamo menzionato precedentemente corrisponde a quella che fu data dal matematico inglese *John Playfair* che la pubblico nel 1795. Il quinto postulato di *Euclide* e l'enunciato di *Playfair* sono equivalenti.

Per circa 2000 anni i matematici cercarono di dimostrare il *Quinto postulato o Postulato sulle Parallele*, una dimostrazione di tale postulato equivaleva in realtà a dimostrare l'unicità della retta parallela. Ogni tentativo fu invano e non portava alla conclusione voluta. Il padre gesuita **Gerolamo Saccheri (1667-1733)** fece un tentativo di dimostrarlo per assurdo. Che cosa significa dimostrarlo per assurdo?

Nel postulato si asserisce che la retta ESISTE ed è UNICA. Ragionare per assurdo vuol dire negare la tesi e quindi supporre che a) NON ESISTONO PARALLELE o b) ESISTE PIU' DI UNA RETTA PARALLELA. Il ragionamento non portava da nessuna parte ma apriva un nuovo mondo di vedere le cose. Si comprendeva che l'unicità della parallela non poteva essere dedotta dagli assiomi e dai risultati conseguite all'interno della *Geometria Euclidea.* Il padre gesuita con la negazione della tesi, a) NON ESISTONO PARALLELE o b) ESISTE PIU' DI UNA RETTA PARALLELA, buttava le basi per la costruzione di nuove geometrie che furono dette *GEOMETRIE NON EUCLIDEE*:

- a) NON ESISTONO PARALLELE **Geometria Ellittica**.
- b) ESISTE PIU' DI UNA RETTA PARALLELA **Geometria Iperbolica**.