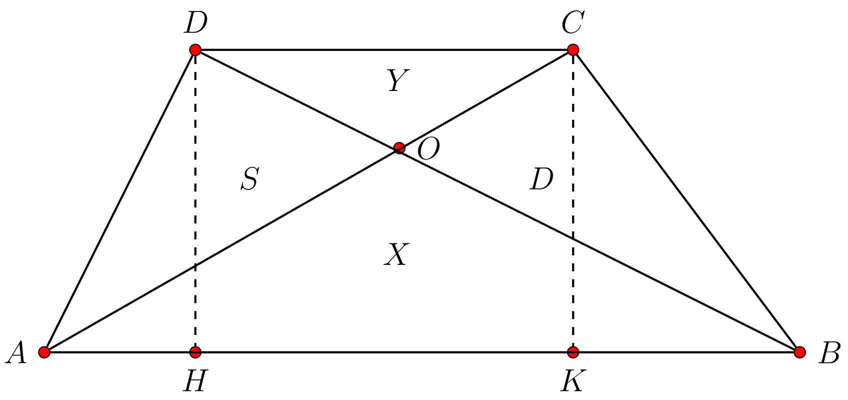
Problema FLATlandia 22 Novembre 2023

Soluzione geometrica (**F. Fernicola)**



Hp: $ABCD$ è un trapezio scaleno. **Th:** $S = D$, $\sqrt{XY} = D$ e $A_T = (\sqrt{X} + \sqrt{Y})^2$

Dimostrazione. Indichiamo per comodità con S l'area del triangolo $A\overset{\triangle}{O}D$ e con D l'area del triangolo $B\overset{\triangle}{O}C$. Indichiamo con b_M la lunghezza del segmento $\overline{AB}$, con b_m la lunghezza del segmento $\overline{CD}$, con h_M la lunghezza dell'altezza del triangolo di area X, con h_m la lunghezza dell'altezza del triangolo di area Y e con h la lunghezza del segmento $\overline{CK} = \overline{DH}$.

Possiamo dire che l'area del triangolo $A\overset{\triangle}{D}B = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{DH} = \frac{1}{2}bh = X + S$

Possiamo dire che l'area del triangolo $A\overset{\triangle}{C}B = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{CK} = \frac{1}{2}bh = X + D$
Dalla relazione precedente possiamo dire che:

$$X + S = X + D \Longrightarrow S = D$$

Abbiamo così provato che i due triangoli $A\overset{\triangle}{O}D$ e $B\overset{\triangle}{O}C$ hanno la stessa area.

Sappiamo che i triangoli che hanno rispettivamente area X e Y sono simili per il *Primo Criterio di Similitudine* (rette parallele formano angoli alterni interni congruenti). Se indichiamo con k il rapporto di similitudine, allora possiamo dire che $\frac{h_M}{h_m} = k$ e $\frac{X}{Y} = k^2$ (questi sono relazioni di natura teorica che ho messo in evidenza anche nelle mie note).

Osserviamo che $Y = \frac{1}{2}b_m h_m$, allora $X = k^2 Y \Longrightarrow XY = k^2 Y^2 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \sqrt{XY} = kY = \frac{b_M}{b_m}\frac{1}{2}b_m h_m = \frac{1}{2}b_M h_m = \frac{1}{2}b_M(h - h_M) = \frac{1}{2}b_M h - \frac{1}{2}b_M h_M = X + D - X = D.$$

Abbiamo così provato che $\sqrt{XY} = D$. Se indichiamo con A_T l'area del trapezio, sembra evidente che $A_T = (X + Y + S + D)$ ed essendo $S = D$ abbiamo che $A_T = (X + Y + 2D)$.

Ora $(\sqrt{X} + \sqrt{Y})^2 = (X + Y + 2\sqrt{XY}) = (X + Y + 2D) = A_T$ e quindi in forma compatta:

$$A_T = (\sqrt{X} + \sqrt{Y})^2$$

Al problema sono state date tutte le risposte!

□