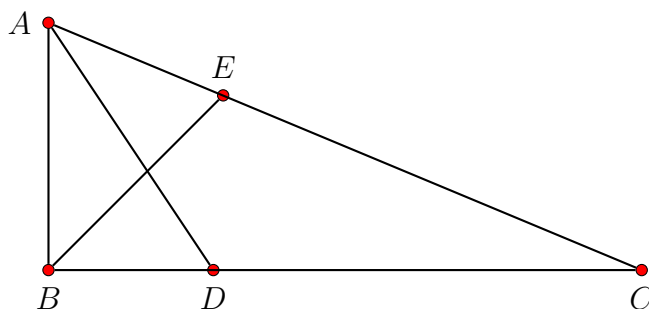


# Problema FLATlandia Febbraio 2024

Soluzione n.1 (Geometrica)

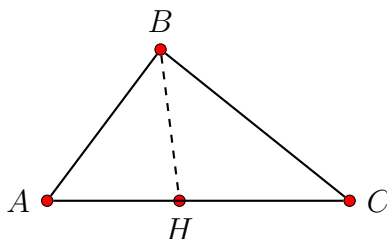


**Dati:**  $\triangle ABC$  triangolo rettangolo,  $AD$  bisettrice di  $\hat{A}$ ,  $BE$  bisettrice di  $\hat{B}$ ,  $\overline{AE} = 5$  e  $\overline{EC} = 12$ .

Nel problema posto si chiede di determinare quanto vale  $\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}}$  e noi dimostreremo che  $\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{3}{2}$ .

*Dimostrazione.* Il risultato che vogliamo provare si basa sul seguente:

**Lemma 1.** Supponiamo di avere un triangolo  $ABC$  e supponiamo che  $BH$  sia la bisettrice dell'angolo in  $\hat{B}$



In una tale situazione vale la seguente proporzione:  $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{AH} : \overline{HC}$

Indichiamo per comodità con  $\overline{AB} = a$ ,  $\overline{BC} = b$  e con  $\overline{BD} = c$ , per il **Lemma** precedente applicato alla bisettrice  $BE$  possiamo scrivere la seguente relazione:  $a : b = 5 : 12$

La relazione precedente si può scrivere come  $\frac{a}{b} = \frac{5}{12}$  e applicando il teorema di Pitagora abbiamo che:

$$\frac{5^2}{12^2}b^2 + b^2 = 17^2 \implies 5^2b^2 + 12^2b^2 = 12^2 \cdot 17^2 \implies 13^2b^2 = 12^2 \cdot 17^2 \implies b = \frac{12 \cdot 17}{13}.$$

Ora applichiamo di nuovo il **Lemma** alla bisettrice  $AD$  possiamo scrivere la seguente relazione:

$$a : 17 = c : (b - c)$$

Dalla relazione precedente abbiamo  $ab - ac = 17c \implies (17 + a)c = ab \implies \frac{a}{c} = \frac{17 + a}{b}$

Possiamo scrivere meglio  $\frac{a}{c} = \frac{17}{b} + \frac{a}{b} = \frac{17}{\frac{12 \cdot 17}{13}} + \frac{5}{12} = \frac{13}{12} + \frac{5}{12} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$ .

Quello che volevamo provare è stato ottenuto in quanto  $\frac{a}{c} = \frac{3}{2}$  ovvero  $\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{3}{2}$

□