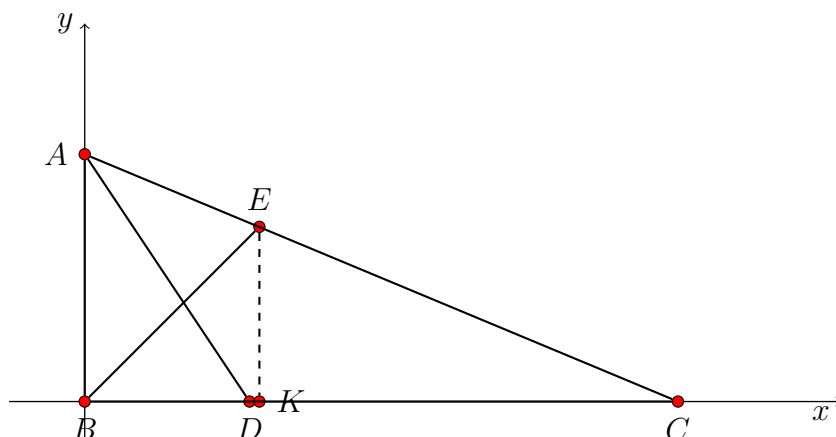


Problema FLATlandia Febbraio 2024

Soluzione n.2 (Analitica)



Dati: $\triangle ABC$ triangolo rettangolo, AD bisettrice di \hat{A} , BE bisettrice di \hat{B} , $\overline{AE} = 5$ e $\overline{EC} = 12$.

Nel problema posto si chiede di determinare quanto vale $\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}}$ e noi dimostreremo che $\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{3}{2}$.

Dimostrazione. Fissiamo un sistema di riferimento come in figura, allora $A \equiv (0, a)$, $B \equiv (0, 0)$ e $C = (c, 0)$. La retta per AC ha equazione $r : ax + cy - ac = 0$. Non è difficile determinare la bisettrice dell'angolo in \hat{A} , essa sarà $\frac{ax + cy - ac}{\sqrt{a^2 + c^2}} = -x$ che scritta in modo "pulito" avremo $s : (a + \sqrt{a^2 + c^2})x + cy - ac = 0$. Se intersechiamo la bisettrice appena determinata s con l'asse delle ascisse troviamo:

$$\begin{cases} (a + \sqrt{a^2 + c^2})x + cy - ac = 0 \\ y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{ac}{a + \sqrt{a^2 + c^2}} \\ y = 0 \end{cases}$$

Possiamo concludere che $\overline{BD} = \frac{ac}{a + \sqrt{a^2 + c^2}}$.

La bisettrice dell'angolo in \hat{B} ha equazione $y = x$ e il punto E ha coordinate $E \equiv \left(\frac{ac}{a+c}, \frac{ac}{a+c}\right)$.

Osserviamo che i triangoli $\triangle ABC$ e $\triangle EKC$ sono simili e quindi:

$$\overline{EK} : \overline{AB} = \overline{EC} : \overline{AC} \implies \frac{ac}{a+c} : a = 12 : 17$$

Dall'ultima relazione scritta non è difficile dedurre che $\frac{a}{c} = \frac{5}{12}$.

Riprendiamo la relazione $\overline{BD} = \frac{ac}{a + \sqrt{a^2 + c^2}}$, possiamo scrivere che $\overline{BD} = \frac{\overline{AB} \cdot c}{a + \sqrt{a^2 + c^2}}$, allora

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{a + \sqrt{a^2 + c^2}}{c} = \frac{a}{c} + \sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2 + 1} = \frac{5}{12} + \sqrt{\left(\frac{5}{12}\right)^2 + 1} = \frac{5}{12} + \sqrt{\frac{25}{144} + 1} = \frac{5}{12} + \sqrt{\frac{169}{144}} =$$

$$= \frac{5}{12} + \frac{13}{12} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}. \text{ Possiamo concludere in forma compatta che } \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{3}{2} \text{ che è quanto volevamo provare.}$$

□