Nota di geometria euclidea

Liceo Assteas -Buccino-

F. Fernicola 8 Novembre 2023

Si comprende bene quanto difficile sia risolvere una questione che non è mai stata affrontata e non fa parte dei classici esercizi canonici, molti che si occupano di didattica dicono che in tali situazioni ci vuole competenza. In parole povere bisogna utilizzare tutte la conoscenza acquisita per trovare una strada o una strategia vincente che possa condurre alla soluzione. In situazioni del genere si comprende quanto importante sia studiare anche "intorno al problema" per dare delle risposte. La cosa interessante della matematica è che essa spesso fornisce diverse strade per arrivare ad una conclusione e tali strade hanno anche "una natura" ben distinta. Enunciamo senza dimostrare alcune proposizioni che possono tornare utili quando si deve risolvere un problema di geometria euclidea.

Osservazione 1. *In un triangolo equilatero di lato l l'altezza $h = \frac{l}{2}\sqrt{3}$.*

Osservazione 2. *In un triangolo qualsiasi la sua superficie si determina utilizzando la formula: $A = \frac{1}{2}bh$ dove b è la misura della base e h è la misura della altezza.*

Definizione 1. *Due triangolo T_1 e T_2 sono congruenti se hanno i tre lati uguali e i tre angoli uguali.*

In base alla definizione precedente per dimostrare che due triangoli sono congruenti dovremmo provare che i sei elementi menzionati sono congruenti (i tre lati e i tre angoli). Per fortuna ci sono tre criteri che ci vengono in aiuto e ci alleggeriscono il lavoro per provare che due triangoli sono congruenti.

Proposizione 2. *Due triangoli sono congruenti se hanno congruenti due lati e l'angolo da essi individuato (Primo criterio di congruenza dei triangoli)*

Proposizione 3. *Due triangoli sono congruenti se hanno congruenti un lato e i due angoli ad esso adiacenti (Secondo criterio di congruenza dei triangoli)*

Proposizione 4. *Due triangoli sono congruenti se hanno congruenti i tre lati (Terzo criterio di congruenza dei triangoli)*

Oltre al concetto di *congruenza tra triangoli*, un altro concetto importante e il concetto di *similitudine tra triangoli.* Al tal proposito si dà la seguente:

Definizione 5. *Due triangoli T_1 e T_2 sono simili se hanno i tre lati in proporzione e i tre angoli uguali.*

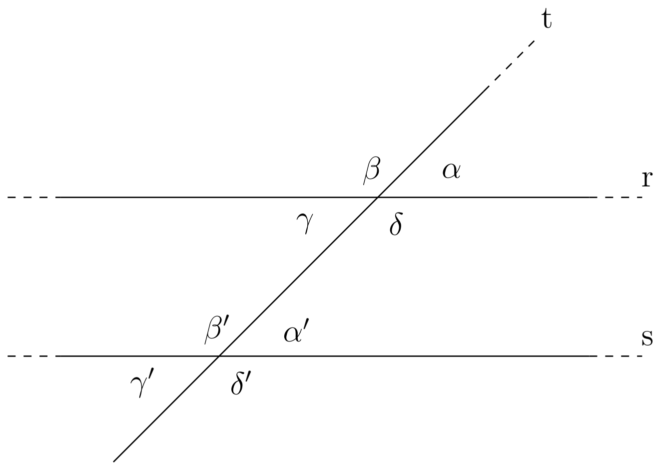
In base alla definizione precedente per dimostrare che due triangoli sono simili dovremmo provare le sei condizioni precedenti (i tre lati in proporzione e i tre angoli uguali). Per fortuna ci sono tre criteri che ci vengono in aiuto e ci alleggeriscono il lavoro per provare che due triangoli sono simili.

Proposizione 6. *Due triangoli sono simili se hanno due angoli uguali (Primo criterio di similitudine dei triangoli)*

Proposizione 7. *Due triangoli sono simili se hanno due lati in proporzione e l'angolo compreso congruente (Secondo criterio di similitudine dei triangoli)*

Proposizione 8. *Due triangoli sono simili se hanno in proporzione i tre lati (Terzo criterio di similitudine dei triangoli)*

Rette parallele tagliate da una trasversale



Quando si considerano due rette parallele r, s tagliate da una trasversale t si formano degli angoli. Per comodità gli angoli che si formano a partire da queste rette li abbiamo indicati come si è soliti fare con le lettere minuscole dell'alfabeto greco. A questo punto di danno le seguenti definizioni:

a) Le coppie di angoli: $\{\alpha, \alpha'\}$, $\{\beta, \beta'\}$, $\{\gamma, \gamma'\}$, $\{\delta, \delta'\}$ si dicono angoli corrispondenti.

b) Le coppie di angoli: $\{\alpha, \delta'\}$, $\{\beta, \gamma'\}$ si dicono angoli coniugati esterni.

c) Le coppie di angoli: $\{\delta, \alpha'\}$, $\{\gamma, \beta'\}$ si dicono angoli coniugati interni.

d) Le coppie di angoli: $\{\alpha, \gamma'\}$, $\{\beta, \delta'\}$ si dicono angoli alterni esterni.

e) Le coppie di angoli: $\{\delta, \beta'\}$, $\{\gamma, \alpha'\}$ si dicono angoli alterni interni.

A questo punto si può enunciare la seguente:

Proposizione 9. *Se rette r_1 e r_2 parallele sono tagliate da una trasversale t, allora si verificano le seguenti condizioni:*

- *Gli angoli alterni interni sono congruenti*
- *Gli angoli alterni esterni sono congruenti*
- *Gli angoli coniugati interni sono supplementari (la loro somma è un angolo piatto)*
- *Gli angoli coniugati esterni sono supplementari (la loro somma è un angolo piatto)*
- *Gli angoli corrispondenti sono congruenti*

La cosa interessante è che ciascuna delle ultime condizione è sufficiente per dire che due rette r_1 e r_2 siano parallele. In altre parole si afferma che vale la seguente:

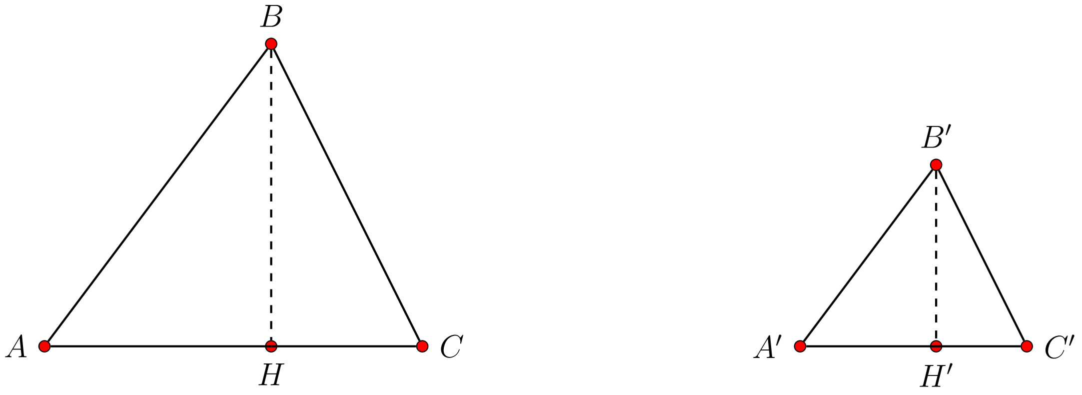
Proposizione 10. *Se due rette r_1 e r_2 tagliate da una trasversale t verificano una delle seguenti condizioni:*

- *Gli angoli alterni interni sono congruenti*
- *Gli angoli alterni esterni sono congruenti*
- *Gli angoli coniugati interni sono supplementari (la loro somma è un angolo piatto)*
- *Gli angoli coniugati esterni sono supplementari (la loro somma è un angolo piatto)*
- *Gli angoli corrispondenti sono congruenti*

allora si può concludere che le due rette r_1 e r_2 sono parallele .

Relazioni sui triangoli simili

Abbiamo dato in precedenza la definizione di triangoli simili. In generale due figure F_1 e F_2 sono simili se hanno la stessa forma. Ora vogliamo vedere alcune relazioni tra figure simili relativamente a triangoli.



Poiché i triangoli sono simili si hanno le seguenti relazioni:

$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = k$ e il numero reale $k \neq 0$ si chiama rapporto di similitudine.

Osservazione 3. *Osserviamo esplicitamente che anche i triangoli* $A\overset{\triangle}{B}H$ *e* $A'\overset{\triangle}{B'}H'$ *sono simili (in virtù del* Primo criterio di similitudine, hanno tre angoli uguali*), possiamo concludere che* $\frac{\overline{BH}}{\overline{B'H'}} = k$.

L'osservazione precedente non è per nulla innocua perché ci permette di ricavare delle cose interessanti:

Con A_T e A_t indichiamo rispettivamente l'area del triangolo "grande" e "piccolo", allora abbiamo:

$$A_T = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BH} \text{ e } A_t = \frac{1}{2} \cdot \overline{A'C'} \cdot \overline{B'H'}, \text{ a questo punto abbiamo:}$$

$\frac{A_T}{A_t} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BH}}{\frac{1}{2} \cdot \overline{A'C'} \cdot \overline{B'H'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} \cdot \frac{\overline{BH}}{\overline{B'H'}} = k \cdot k = k^2$, in forma compatta $\frac{A_T}{A_t} = k^2$. Possiamo concludere che il rapporto delle aree di due triangoli simili coincide con il quadrato del rapporto di similitudine.