Fattorizzazione
e
Trinomio riconducibile a quadrato di binomio

Giovanni Forlenza

Liceo Scientifico "Assteas" di Buccino (SA)

Gragnano, 27 Maggio 2023 - Convegno

Introduzione

- Parliamo di fattorizzazione in $\mathbb{R}$ di un trinomio del tipo:

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

$$a > 0 \;\; b, c \in \mathbb{Z}^* \text{ e } M.C.D.(a, b, c) = 1$$

Contenuti

- Trinomio irriducibile in $\mathbb{R}$

Contenuti

- Trinomio irriducibile in $\mathbb{R}$
- Trinomio fattorizzabile in $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$

Contenuti

- Trinomio irriducibile in $\mathbb{R}$
- Trinomio fattorizzabile in $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$
- Trinomio fattorizzabile in $\mathbb{Z}$

Contenuti

- Trinomio irriducibile in $\mathbb{R}$
- Trinomio fattorizzabile in $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$
- Trinomio fattorizzabile in $\mathbb{Z}$
- Trinomio riconducibile a quadrato di binomio

Definizione

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\downarrow$$

RIDUCIBILE

$$\swarrow \quad \searrow$$

$$mx + n \qquad rx + s$$

$$ax^2 + bx + c = (mx + n) \cdot (rx + s)$$

Altrimenti $p(x)$ si dice IRRIDUCIBILE

Definizione

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

DISCRIMINANTE

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Esempi

- $\Delta < 0$

Esempi

- $\Delta < 0$
- $p(x) = 2x^2 + x + 1 \Longrightarrow \Delta = -7 < 0$

Esempi

- $\Delta < 0$
- $p(x) = 2x^2 + x + 1 \Longrightarrow \Delta = -7 < 0$
- $p(x)$ è irriducibile

Esempi

- $\Delta > 0 \longrightarrow$ non quadrato *Fattorizzabile in* $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$

Esempi

- $\Delta > 0 \longrightarrow$ non quadrato *Fattorizzabile in* $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$
- $p(x) = 2x^2 + 3x - 1 \Longrightarrow \Delta = 17$ non quadrato

Esempi

- $\Delta > 0 \longrightarrow$ non quadrato *Fattorizzabile in* $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$
- $p(x) = 2x^2 + 3x - 1 \Longrightarrow \Delta = 17$ non quadrato
- $p(x) = \left(2x + \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\right) \cdot \left(x + \dfrac{3-\sqrt{17}}{4}\right)$

Esempi

- $\Delta > 0 \longrightarrow$ quadrato *Fattorizzabile in* $\mathbb{Z}$

Esempi

- $\Delta > 0 \longrightarrow$ quadrato *Fattorizzabile in* $\mathbb{Z}$

- $p(x) = 6x^2 + x - 2 \Longrightarrow \Delta = 49$ quadrato

Esempi

- $\Delta > 0 \longrightarrow \text{quadrato}$ *Fattorizzabile in* $\mathbb{Z}$
- $p(x) = 6x^2 + x - 2 \Longrightarrow \Delta = 49 \text{ quadrato}$
- $p(x) = (3x + 2) \cdot (2x - 1)$

Esempi

- $\Delta = 0$ *Quadrato di binomio a coefficienti in* $\mathbb{Z}$

Esempi

- $\Delta = 0$ *Quadrato di binomio a coefficienti in* $\mathbb{Z}$
- $p(x) = 4x^2 + 20x + 25 \Longrightarrow \Delta = 0$

Esempi

- $\Delta = 0$ *Quadrato di binomio a coefficienti in* $\mathbb{Z}$
- $p(x) = 4x^2 + 20x + 25 \Longrightarrow \Delta = 0$
- $p(x) = (2x + 5)^2$

Fattorizzazione

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

$$n_1 + n_2 = b \qquad\qquad n_1 \cdot n_2 = ac$$

$$n_1 = \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2} \qquad\qquad n_2 = \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$p(x) = ax^2 + bx + c = (ax + n_1)\left(x + \frac{n_2}{a}\right)$$

Radici equazione di secondo grado

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff \left(ax + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2}\right)\left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$

$$ax + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2} = 0 \Longrightarrow x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \Longrightarrow x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

INTERESSANTE

Trinomio con $\Delta = \lambda^2$ con $\lambda > 0 \Longrightarrow$ Fattorizzabile in $\mathbb{Z}$

$$p(x) = 6x^2 - x - 2 \Longrightarrow \Delta = 49 = 7^2$$

$$n_1 = \frac{-1-7}{2} = -4 \qquad n_2 = \frac{-1+7}{2} = 3$$

$$p(x) = 6x^2 - x - 2 = (6x-4)\left(x + \frac{3}{6}\right)$$

$$p(x) = 6x^2 - x - 2 = {\color{red}2}(3x-2)\left(x + \frac{1}{{\color{red}2}}\right) = (3x-2)(2x+1)$$

INTERESSANTE

Trinomio con $\Delta = \lambda^2$ con $\lambda > 0 \Longrightarrow$ Fattorizzabile in $\mathbb{Z}$

$$p(x) = 8x^2 + 6x - 9 \Longrightarrow \Delta = 324 = 18^2$$

$$n_1 = \frac{6-18}{2} = -6 \qquad n_2 = \frac{6+18}{2} = 12$$

$$p(x) = 8x^2 + 6x - 9 = (8x+12)\left(x + \frac{-6}{8}\right)$$

$$p(x) = 8x^2 + 6x - 9 = 4(2x+3)\left(x - \frac{3}{4}\right) = (2x+3)(4x-3)$$

Trinomio con $\Delta = \lambda^2$ con $\lambda > 0 \Longrightarrow$ Fattorizzabile in $\mathbb{Z}$

Lemma 1. *Se* $a \mid b \cdot c$ *e* $M.C.D.(a, b) = 1$, *allora* $a \mid c$.

Dimostrazione. Sappiamo che $M.C.D.(a, b) = 1$ e quindi per il teorema di Bezout esistono u, v interi con $1 = au + bv \Longrightarrow c = acu + bcv$. Sappiamo per ipotesi che $a \mid b \cdot c$, allora esiste $r \in \mathbb{Z}^*$ tale che $bc = ra$ e quindi sostituendo nella relazione precedente
$c = acu + rav = a(cu + rv)$, l'ultima relazione dice che $a \mid c$ da cui segue la tesi. □

Ora proviamo che vale la seguente:

Proposizione 2. *Se* $p(x) = ax^2+bx+c$ *è un trinomio con* $a > 0$ *e* $b, c \in \mathbb{Z}^*$, $M.C.D(a, b, c) = 1$ *e* $\Delta = \lambda^2$ *con* $\lambda > 0$, *allora esso è fattorizzabile in* $\mathbb{Z}$.

Dimostrazione. Sappiamo che vale la seguente relazione:

$$p(x) = ax^2 + bx + c = \left(ax + \frac{b}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

Osserviamo immediatamente che da $\Delta + 4ac = b^2$ segue che Δ e b^2 hanno la stessa parità e lo stesso dicasi per $\sqrt{\Delta}$ e b.

Risulta evidente che la quantità $\frac{b}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} = n_1$ e $\frac{b}{2} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2} = n_2$

La fattorizzazione si può scrivere nel seguente modo:

$$p(x) = ax^2 + bx + c = (ax + n_1)\left(x + \frac{n_2}{a}\right)$$

Indichiamo con $s = M.C.D.(a, n_1)$, allora $\frac{a}{s} = h$ e $\frac{n_1}{s} = k$ con $M.C.D.(h, k) = 1$.
Possiamo scrivere

$$p(x) = ax^2 + bx + c = s\,(hx + k)\left(x + \frac{n_2}{sh}\right)$$

Resta da dimostrare che $h \mid n_2$ e la proposizione è dimostrata,

$n_1 \cdot n_2 = ac \Longrightarrow n_1 \cdot n_2 = shc \Longrightarrow \frac{n_1}{s} \cdot \frac{n_2}{h} = c \Longrightarrow \frac{k \cdot n_2}{h} = c$. Da questa ultima relazione sapendo che $M.C.D.(h, k) = 1 \Longrightarrow$ per il lemma 1 $h \mid n_2$ e quindi $\frac{n_2}{h} = t$ e la fattorizzazione del trinomio diventa:

$$p(x) = ax^2 + bx + c = s\,(hx + k)\left(x + \frac{n_2}{sh}\right) = s\,(hx + k)\left(x + \frac{t}{s}\right) = s\,(hx + k)\left(\frac{sx + t}{s}\right)$$

$$p(x) = ax^2 + bx + c = (hx + k) \cdot (sx + t)$$

Trinomio con $\Delta = 0$

Proposizione

Assegnato il trinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ *con* $\Delta = 0$*, allora*

(1) $\quad M.C.D(a, c) = 1$

(2) $\quad$ *a e c sono quadrati.*

Il prodotto di due numeri coprimi a e c è un quadrato quando a e c sono quadrati.

Trinomio con $\Delta = 0$

Proposizione 3. *Sia assegnato il trinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$. Se $\Delta = 0$, allora*

(1) $M.C.D(a, c) = 1$ (2) *a e c sono quadrati.*

Dimostrazione. (1) Supponiamo per assurdo che $M.C.D(a, c) = M > 1$, allora $M \mid a$ e $M \mid c$ ovvero esistono $h, k \in \mathbb{N}^*$ con $a = Mh$ e $c = Mk$. Poiché $b^2 = 4ac \Longrightarrow b^2 = 4(Mh)(Mk) \Longrightarrow b^2 = 4hkM^2 \Longrightarrow M^2 \mid b^2 \Longrightarrow M \mid b$, allora $M.C.D(a, b, c) = M > 1$ e questo è assurdo in quanto abbiamo detto di considerare solo trinomi del tipo $p(x) = ax^2 + bx + c$ con $M.C.D(a, b, c) = 1$. (2) Per ipotesi sappiamo che $\Delta = 0 \Longrightarrow b^2 = 4ac \Longrightarrow b^2$ è pari e b è pari. Se $a = 1$ e $c = 1$ la proposizione è vera. Se $a = 1$ si comprende che da $c = \frac{b^2}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2$ e quindi a e c sono quadrati; allo stesso modo si conclude se $c = 1$. Possiamo supporre $a > 1$ e $b > 1$, da $b^2 = 4ac \Longrightarrow b^2$ è pari, allora b è pari e quindi $\exists m \in \mathbb{Z}^*$ con $b = 2m \Longrightarrow 4ac = 4m^2$ e quindi $ac = m^2$. Proviamo che a non è un numero primo, se cosi fosse $a|ac \Longrightarrow a|m^2 \Longrightarrow a|m$, allora $m = as$ e quindi $ac = a^2s^2 \Longrightarrow c = as^2$, questa conclusione ci dice che $M.C.D.(a, c) = a \neq 1$ in contrasto con (1). In conclusione possiamo dire che a e c non sono primi e $a, c \geq 4$, allora per il $T.F.A$ abbiamo:

$$a = p_1^{h_1} \cdot p_2^{h_2} \cdots p_r^{h_r}$$
$$c = q_1^{k_1} \cdot q_2^{k_2} \cdots q_s^{k_s}$$

Poiché $M.C.D.(a, c) = 1$, allora $p_i \neq q_j$. Possiamo scrivere:

$$p_1^{h_1} \cdot p_2^{h_2} \cdots p_r^{h_r} \cdot q_1^{k_1} \cdot q_2^{k_2} \cdots q_s^{k_s} = m^2$$

Sappiamo che $p_1^{h_1}$ divide il termine a primo membro, allora $p_1^{h_1}|m^2 \Longrightarrow h_1$ è pari e cosi concludiamo per tutti gli esponenti h_i e k_i. In conclusione possiamo scrivere:

$$p_1^{2\overline{h_1}} \cdot p_2^{2\overline{h_2}} \cdots p_r^{2\overline{h_r}} \cdot q_1^{2\overline{k_1}} \cdot q_2^{2\overline{k_2}} \cdots q_s^{2\overline{k_s}} = m^2$$
$$(p_1^{\overline{h_1}} \cdot p_2^{\overline{h_2}} \cdots p_r^{\overline{h_r}})^2 \cdot (q_1^{\overline{k_1}} \cdot q_2^{\overline{k_2}} \cdots q_s^{\overline{k_s}})^2 = m^2$$

Concludiamo che $a = (p_1^{\overline{h_1}} \cdot p_2^{\overline{h_2}} \cdots p_r^{\overline{h_r}})^2$ e $c = (q_1^{\overline{k_1}} \cdot q_2^{\overline{k_2}} \cdots q_s^{\overline{k_s}})^2$ sono quadrati.

Trinomio con $\Delta = 0$ Quadrato di binomio

$$n_1 = \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2} \qquad n_2 = \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$n_1 = \frac{b}{2} \qquad n_2 = \frac{b}{2}$$

$$n_1 = n_2 = n \qquad \Longrightarrow \qquad n = \frac{b}{2}$$

$$b = 2n \qquad n^2 = ac$$

Dalla **Proposizione** precedente $n^2 = ac \Longrightarrow$ a e c sono quadrati:

$$n = \pm\sqrt{a}\sqrt{c} \qquad b = \pm 2\sqrt{a}\sqrt{c}$$

$$p(x) = ax^2 + bx + c = (\sqrt{a}x \pm \sqrt{c})^2$$

Problema riguardo al caso $\Delta = 0$

Sappiamo che se $\Delta = \lambda^2$ con $\lambda > 0$

$p(x) = ax^2 + bx + c = (hx + k) \cdot (sx + t)$

$$p(x) = ax^2 + bx + c = (ax + n) \cdot \left(x + \frac{n}{t}\right)$$

$$p(x) = ax^2 + bx + c = s(hx + k) \cdot \left(x + \frac{n}{s \cdot h}\right)$$

PARTENDO da $\Delta = 0$ dedurre che $h = s \Longrightarrow \frac{n}{s} = k$

$$p(x) = ax^2 + bx + c = s(sx + k) \cdot \left(x + \frac{n}{s \cdot s}\right)$$

$$p(x) = ax^2 + bx + c = (sx + k)^2$$

Problema riguardo al caso $\Delta = 0$

$$p(x) = 4x^2 + 4x + 1 \Longrightarrow \Delta = 0$$

$$n_1 = \frac{4}{2} = 2 \qquad n_2 = \frac{4}{2} = 2$$

$$p(x) = 4x^2 + 4x + 1 = 2(2x+1)\left(x + \frac{2}{2 \cdot 2}\right)$$

$$p(x) = 4x^2 + 4x + 1 = \color{red}{2}(\color{red}{2}x+1)\left(x + \frac{1}{\color{red}{2}}\right) = (2x+1)^2$$

Problema riguardo al caso $\Delta = 0$

$$p(x) = 25x^2 - 20x + 4 \implies \Delta = 0$$

$$n_1 = \frac{-20}{2} = -10 \qquad n_2 = \frac{-20}{2} = -10$$

$$p(x) = 25x^2 - 20x + 4 = 5(5x - 2)\left(x + \frac{-10}{5 \cdot 5}\right)$$

$$p(x) = 25x^2 - 20x + 4 = 5(5x - 2)\left(x - \frac{2}{5}\right) = (5x - 2)^2$$

Problema in forma sintetica

Da $\Delta = \lambda^2 > 0$ abbiamo dedotto $p(x) = (hx + k)(rx + t)$

Tentare di dedurre la fattorizzazione $p(x) = (sx + k)^2$ da quella già esposta quando $\Delta = 0$

Grazie per la vostra attenzione