FLAT*landia*

Rubrica mensile di problemi di geometria per studenti della Scuola secondaria.

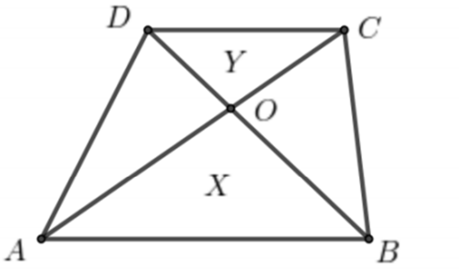
Flatlandia – Problema di novembre 2023 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Flatlandia - Problema 6 - 27 novembre 2023

In un trapezio $ABCD$, le diagonali AC e BD si incontrano nel punto O (vedi figura). Sia X l'area del triangolo ABO e Y l'area del triangolo CDO. Dimostrare che:

a) i triangoli AOD e BCO sono equivalenti e che la loro area è la media geometrica tra X e Y.



b) l'area del trapezio è data da $\mathcal{A} = \left(\sqrt{X} + \sqrt{Y}\right)^2$.
Motivare le risposte.

Commento
Il problema poneva due quesiti, tra loro dipendenti, riguardanti i quattro triangoli che si formano tracciando le diagonali di un trapezio qualsiasi.

Le risposte arrivate sono tutte corrette, senza particolari errori o imprecisioni. La scelta di una risoluzione analitica ci sembra però non ottimale.

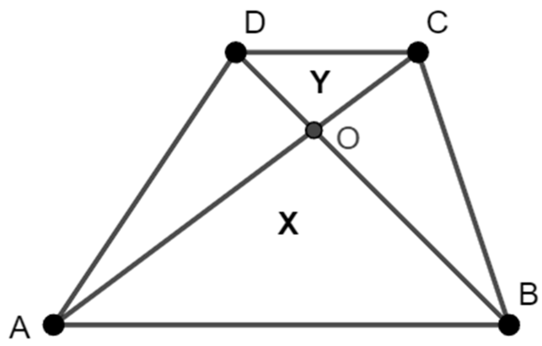
Sono arrivate quattro risposte. Abbiamo ricevuto risposte da studenti delle seguenti scuole (in ordine di arrivo):

- Liceo Cecioni, Livorno
- Liceo Scientifico Calini, Brescia
- ITST-Marconi, Campobasso
- Liceo Scientifico "Assteas", Buccino (SA).

Nota. *Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.*

Soluzioni arrivate

1)Soluzione inviata dalla classe 2ALS-Liceo Cecioni-Livorno (tramite l'insegnante)



Dimos–trazioni:

a) I due triangoli [AOD] [[AOB]] e BCO sono equivalenti perché l'area del triangolo ABD è uguale all'area del triangolo ABC (stessa base AB e stessa altezza) quindi vale la seguente uguaglianza tra le aree:
A(AOD)=A(ABD)-X=A(ABC)-X=A(BCO) e si ha la tesi cioè i due triangoli AOD e BCO sono equivalenti.
I due triangoli AOB e COD sono simili, sia k il rapporto di similitudine quindi $\frac{AB}{CD} = k$ e il rapporto tra le aree è $\frac{X}{Y} = k^2$. Anche il rapporto tra le aree dei due triangoli ABD e CDB è uguale a $\frac{AB}{CD} = k$ poiché (indicando con h l'altezza del trapezio) si ha $\frac{AB \cdot h}{2} : \frac{CD \cdot h}{2} = \frac{AB \cdot h}{2} \cdot \frac{2}{CD \cdot h} = \frac{AB}{CD} = k$
Indico con Z l'area di AOD che è uguale all'area di BCO e scrivo il rapporto tra le aree dei due triangoli ABD e CDB $\frac{X+Z}{Y+Z} = k$ e da $\frac{X}{Y} = k^2$ si ricava $k = \sqrt{\frac{X}{Y}}$ quindi sostituendo si ha
$\frac{X+Z}{Y+Z} = \sqrt{\frac{X}{Y}}$ elevo i due membri al quadrato $\frac{(X+Z)^2}{(Y+Z)^2} = \frac{X}{Y}$

$$(X^2 + 2ZX + Z^2) \cdot Y = X \cdot (Y^2 + 2YZ + Z^2)$$
$$X^2Y + 2ZXY + Z^2Y = XY^2 + 2XYZ + XZ^2$$
$$Z^2 \cdot (Y - X) = XY \cdot (Y - X)$$

Quindi dividendo i due membri per $Y - X$ si ha [Y diverso da X]

$$Z^2 = XY$$

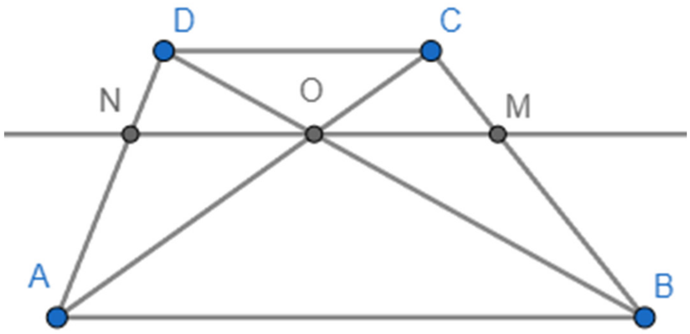
Per cui $Z = \sqrt{XY}$ cioé l'area dei due triangoli è la media geometrica tra X e Y.

b) L'area del trapezio è uguale alla somma $X + Y + 2Z = X + Y + 2\sqrt{XY} =$

$$\left(\sqrt{X} + \sqrt{Y}\right)^2$$

2)Soluzione proposta da Davide Averoldi, classe 5^N Liceo Scientifico Calini Brescia

a) Dimostro innanzitutto che i due triangoli AOD e BCO sono equivalenti.

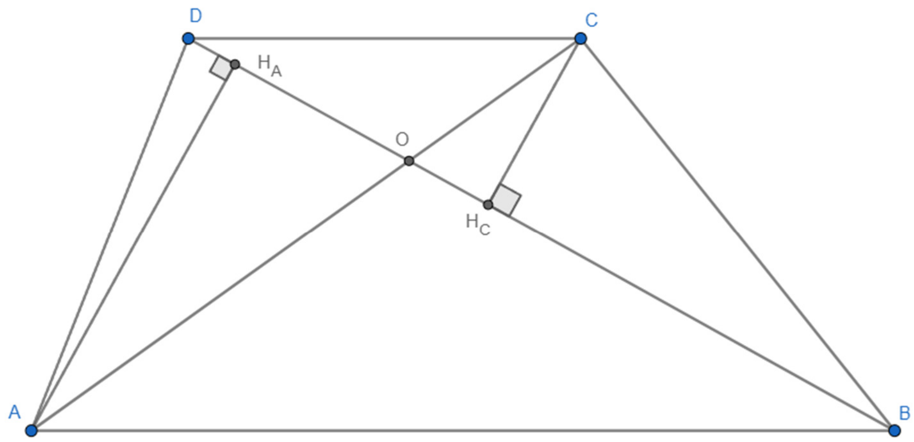


Traccio la retta parallela ad AB e CD passante per O, chiamo N l'intersezione con AD e M quella con BC.

Da questa costruzione risultano le similitudini: DNO ≈ DAB e CMO ≈ CBA, che in particolare hanno lo stesso fattore di scala k in quanto DN : DA = CM : CB per Talete. Di conseguenza NO : AB = OM : AB quindi NO = OM.

(Da qui in poi, per rapidità, una dicitura del tipo ABC significa "l'area del triangolo ABC")

Poiché D e C hanno la stessa distanza dalla retta NM e NO = OM, allora DON = COM. Lo stesso si può dire per la coppia di triangoli AON e BOM. Sommando le due uguaglianze si ottiene DON+AON = COM+BOM , quindi AOD = BCO.



Dimostro ora che AOD x BCO = ABO x CDO, (Queste ultime due sono X e Y)

Traccio le altezze da A,C relative alla retta DB. Il prodotto AOD x BCO può essere espresso come (OD x AH_a / 2) x (OB x CH_c / 2) mentre il prodotto ABO x CDO può essere espresso come (OB x AH_a / 2) x (OD x CH_c / 2). Svolgendo i calcoli si ottiene che le due espressioni sono equivalenti, quindi AOD x BCO = ABO x CDO.

Concludo il punto dimostrando che le due aree AOD, BCO sono ciascuna la media geometrica delle aree X,Y.

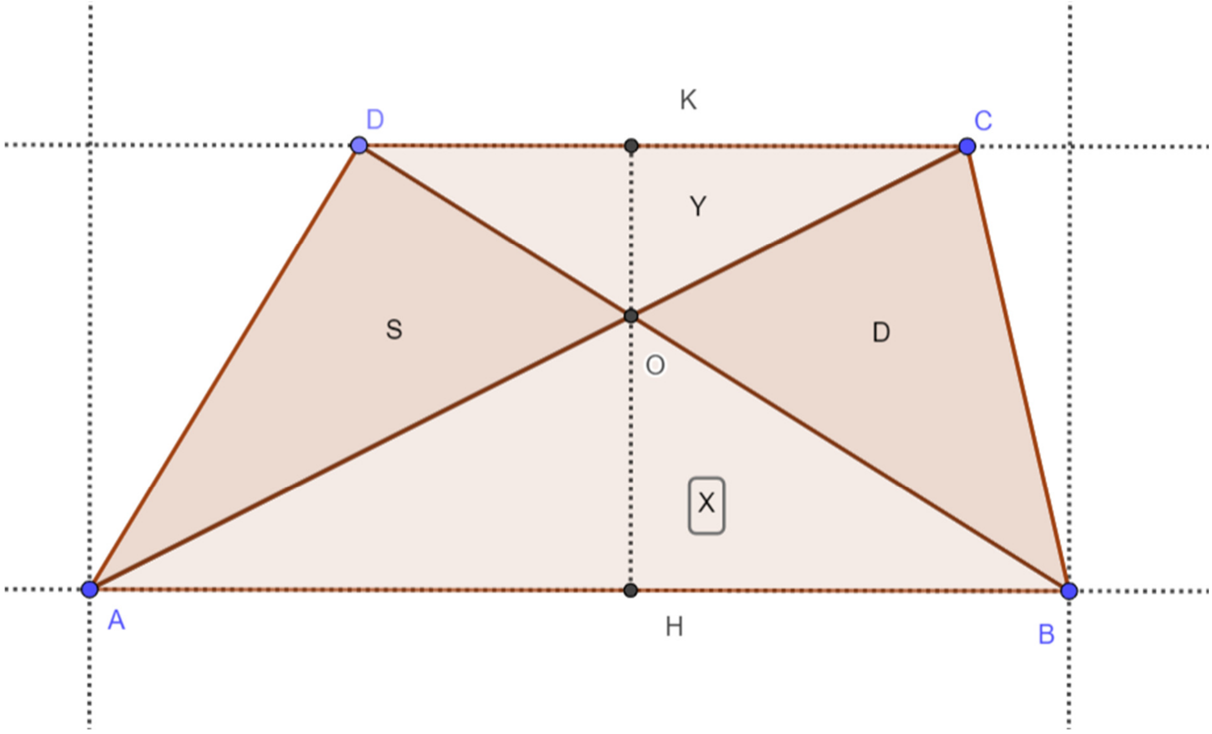
Poiché AOD = BCO, posso scrivere (recuperando anche X e Y per indicare rispettivamente ABO e CDO come nel testo originale) : $AOD^2 = BCO^2 = XY$. Essendo tutte le aree positive, da ciò deriva AOD = BCO = $\sqrt{XY}$, quindi sia AOD che BCO sono la media geometrica di X e Y.

b) L'area totale del trapezio equivale alla somma delle aree dei quattro triangoli. Utilizzando quanto dimostrato al punto precedente: $A_{totale} = X + Y + \sqrt{XY} + \sqrt{XY}$, da cui (sapendo che entrambe

$$A_{totale} = X + Y + 2\sqrt{XY} = \sqrt{X}^2 + 2\sqrt{XY} + \sqrt{Y}^2 = \left(\sqrt{X} + \sqrt{Y}\right)^2$$

le aree sono positive) si ottiene algebricamente quanto richiesto:

3)-Soluzione inviata dalla classe-4ABA-ITST-MARCONI-CAMPOBASSO (tramite l'insegnante)



Ipotesi
ABCD trapezio

Tesi
$S = D$
$S = \sqrt{XY}$
$A = (\sqrt{X} + \sqrt{Y})^2$

Dimostrazione
Siano S e D rispettivamente [le aree dei] triangoli AOD e BOC:

$$S = Area(ABD) - X$$

$D = Area(ABC) - X$

Poiché i triangoli ABD e ABC hanno stessa area [perché ?] segue che S=D

Inoltre:

$S = \quad Area(ABD) - X = \frac{AB(KO+OH)}{2} - X = \frac{AB*KO}{2} + \frac{AB*HO}{2} - X = \frac{AB*KO}{2}$

D= $Area(BCD) - Y = \frac{CD(KO+OH)}{2} - Y = \frac{CD*KO}{2} + \frac{CD*HO}{2} - Y = \frac{CD*HO}{2}$

Dunque:

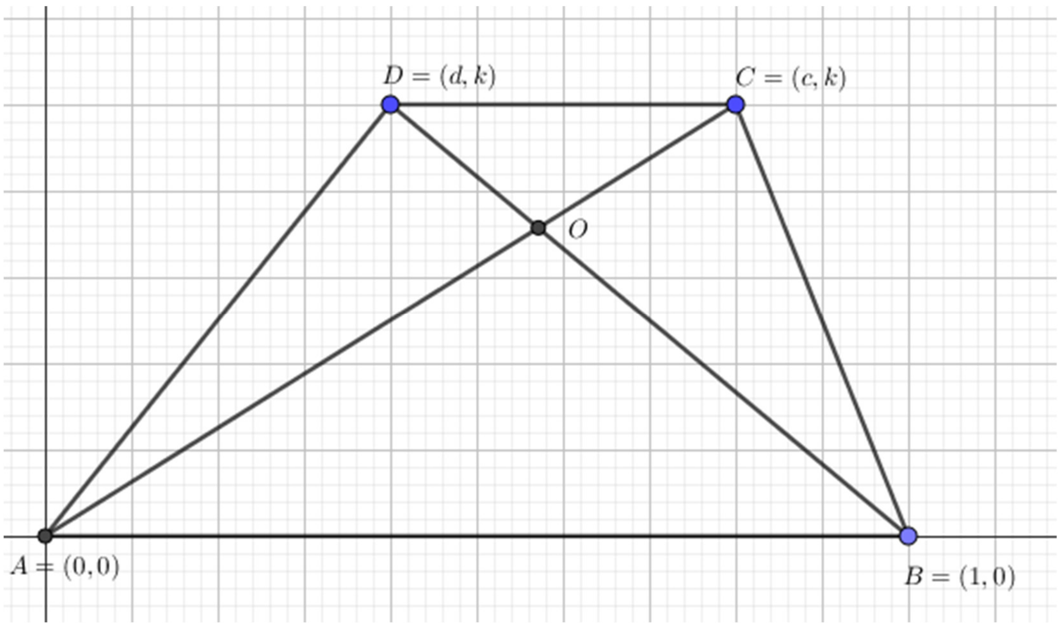
$S*D = \frac{AB*KO}{2} * \frac{CD*HO}{2} = \frac{AB*HO}{2} * \frac{CD*KO}{2} = X*Y$

Da cui $S*D=S*S=X*Y$ *e* $S=D=\sqrt{X*Y}$

Infine

$A=X+Y+S+D=X+Y+2S=X+Y+2\sqrt{X*Y}=(\sqrt{X}+\sqrt{Y})^2$.

4)-Soluzione proposta da Dell'Orto Filomena e Parisi Mariachiara, Classe 3A Liceo Scientifico ASSTEAS Buccino (SA)



Dimostrazione:

Fissiamo un sistema di riferimento come quello in alto con

$$A=(0{,}0), B=(1{,}0), C=(c,k)\ e\ D=(d,k)\ con\ 1>c>d>0\ e\ k>0.$$

Iniziamo con il determinare le equazioni delle rette che passano per le seguenti coppie di punti:

- La retta per A e D: $\mathrm{kx}-\mathrm{dy}=0$.
- La retta per B e C: $\mathrm{kx}+(1-\mathrm{c})\mathrm{y}-\mathrm{k}=0$.
- La retta per A e C: $\mathrm{kx}-\mathrm{cy}=0$.
- La retta per B e D: $\mathrm{kx}+(1-\mathrm{d})\mathrm{y}-\mathrm{k}=0$.

Ora determiniamo le coordinate del punto O e quindi dobbiamo risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} kx-cy=0 \\ kx+(1-d)y-k=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{k}{c}x \\ kx+\frac{k}{c}x-\frac{kd}{c}x-k=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{k}{c}x \\ kx(c+1-d)-kc=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y=\frac{k}{c}x \\ x=\frac{kc}{k(1+c-d)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{k}{1+c-d} \\ x=\frac{c}{1+c-d} \end{cases} \qquad O\equiv\left(\frac{c}{1+c-d};\frac{k}{1+c-d}\right)$$

Per comodità poniamo $\frac{1}{1+c-d}=\rho$ $\qquad O\equiv(\rho c;\rho k)$

Determiniamo la distanza di O dalla retta per B e C:

d(O,BC)= $\frac{|\rho ck+\rho k-\rho ck-k|}{\sqrt{k^2+(1-c)^2}}$ d(O,BC)=$\frac{|\rho k-k|}{\sqrt{k^2+(1-c)^2}}=\frac{|\mathrm{k}(\rho-1)|}{\sqrt{k^2+(1-c)^2}}$, poiché $\rho-1<0$

allora d(O,BC)=$\frac{\mathrm{k}(1-\rho)}{\sqrt{k^2+(1-c)^2}}$.

Calcoliamo l'area del triangolo $\overset{\Delta}{\overbrace{BOC}}$ e la indichiamo con *D*:

BC =$\sqrt{k^2+(1-c)^2}$

D =$\frac{1}{2}\sqrt{k^2+(1-c)^2}\cdot\frac{\mathrm{k}(1-\rho)}{\sqrt{k^2+(1-c)^2}}$=$\frac{1}{2}k\cdot(1-\rho)$

Determiniamo la distanza di O dalla retta per A e D:

d(O,AD)=$\frac{|\rho ck-\rho dk|}{\sqrt{k^2+d^2}}$=$\frac{\rho k(c-d)}{\sqrt{k^2+d^2}}$

Calcoliamo l'area del triangolo $\overset{\Delta}{\overbrace{AOD}}$ e la indichiamo con *S*:

AD=$\sqrt{k^2+d^2}$

$S=\frac{1}{2}\sqrt{k^2+d^2}\cdot\frac{\rho k(c-d)}{\sqrt{k^2+d^2}}$, allora $S=\frac{1}{2}\rho k\cdot(c-d)$
Proviamo che D=S ovvero che $\frac{1}{2}k\cdot(1-\rho)=\frac{1}{2}\rho k\cdot(c-d)$

E' sufficiente notare che $1-\rho=1-\frac{1}{1+c-d}$=$\frac{c-d}{1+c-d}=\rho(\mathrm{c}-\mathrm{d})$, ovvero $1-\rho=\rho(\mathrm{c}-\mathrm{d})$ e quindi l'uguaglianza in alto è verificata.

Calcoliamo la media geometrica delle aree dei triangoli $\overset{\Delta}{\overbrace{ABO}}$ e $\overset{\Delta}{\overbrace{DOC}}$.
d(O,AB)=$\rho\mathrm{k}$, d(A,B)=1 *X*= $\frac{1}{2}\rho\mathrm{k}$

d(O,DC)=$k-\rho\mathrm{k}$=k(1-ρ) e poiché $1-\rho=\rho(\mathrm{c}-\mathrm{d})$, allora d(O,DC)= $\mathrm{k}\rho(\mathrm{c}-\mathrm{d})$.

d(C,D)= $c-d$

Y= $\frac{1}{2}(c-d)\mathrm{k}\,\rho(\mathrm{c}-\mathrm{d})$= $\frac{1}{2}k\rho(c-d)^2$

$m_g=\sqrt{X\cdot Y}=\sqrt{\frac{1}{2}\rho k\cdot\frac{1}{2}\rho k(c-d)^2}$= $\frac{1}{2}\rho k(c-d)$ e quindi $m_g=\sqrt{X\cdot Y}=\frac{1}{2}\rho k\cdot(c-d)=S$.

In sintesi $m_g=\sqrt{X\cdot Y}=S$.

Infine l'area del trapezio coincide con il quadrato della somma tra le radici quadrate delle aree dei triangoli $\overbrace{ABO}^{\Delta}$ e $\overbrace{DOC}^{\Delta}$. In realtà avendo dimostrato che $m_g = S = \sqrt{X \cdot Y}$, l'ultima relazione si prova facilmente in quanto

$$A_T = (X + Y + 2S) = (X + Y + 2\sqrt{X \cdot Y}) = (\sqrt{X} + \sqrt{Y})^2$$

La relazione però la vogliamo verificare direttamente:

$AB = 1$ $\qquad$ $DC = c - d$ $\qquad$ $d(D, AB) = k$

Osserviamo che $\rho = \frac{1}{1+c-d} \Longrightarrow 1 + c - d = \frac{1}{\rho}$

$A_T = \frac{1}{2} * (1 + c - d) \cdot k = \frac{k}{2\rho} \quad \Longrightarrow \quad A_T = \frac{k}{2\rho}$

$\left(\sqrt{X} + \sqrt{Y}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{1}{2}\rho k} + \sqrt{\frac{1}{2}k\rho(c-d)^2}\right)^2 = \frac{1}{2}\rho k + \frac{1}{2}k\rho(c-d)^2 + k\rho(c-d) =$

$= \frac{1}{2}\rho k[1 + (c-d)^2 + 2(c-d)] = \frac{1}{2}\rho k[1 + (c-d)^2 + 2(c-d)] = \frac{1}{2}\rho k[1 + (c-d)]^2 =$

[nella riga precedente i primi due termini sono uguali]

$= \frac{1}{2}\rho k(1 + c - d)^2 = \frac{1}{2}\rho k \cdot \frac{1}{\rho^2} = \frac{k}{2\rho}$. Abbiamo così provato che $\left(\sqrt{X} + \sqrt{Y}\right)^2 = A_T$

[I passaggi sono corretti, ma il procedimento è molto prolisso. Inoltre non era opportuno usare la geometria analitica.]