FLAT*landia*

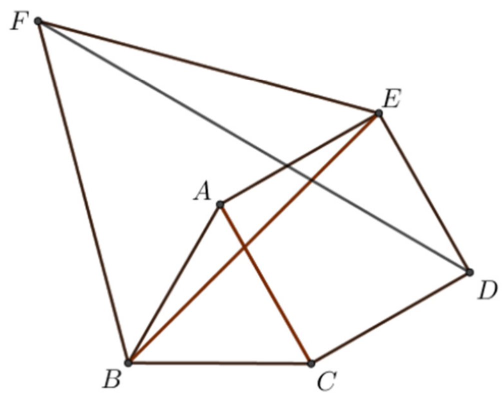
Rubrica mensile di problemi di geometria per studenti della Scuola secondaria

Flatlandia – Problema di ottobre 2023 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Flatlandia - Problema 2 - 23 ottobre 2023

Sia ABC un triangolo equilatero ed esternamente a esso si costruisca il quadrato $ACDE$ di lato AC. Si costruisca poi anche il triangolo equilatero di lato BE, dalla parte opposta al punto C (vedi figura).
Determinare l'ampiezza dell'angolo $\widehat{CDF}$.
Motivare la risposta.



Commento

Il problema poneva un quesito relativo alla figura ottenuta a partire da un triangolo equilatero in cui si doveva costruire un quadrato su uno dei lati e successivamente un altro triangolo equilatero su un particolare segmento. Si chiedeva di determinare l'ampiezza di un angolo.

Sono arrivate nove risposte, cinque delle quali dalla stessa scuola.
Le risposte arrivate sono tutte corrette e utilizzano in gran parte proprietà elementari di geometria euclidea, anche se una delle soluzioni fa uso della geometria analitica.
C'è ancora da rilevare che una attenta rilettura dell'elaborato avrebbe evitato molti errori di scrittura (soprattutto scambi di lettere per indicare i punti).

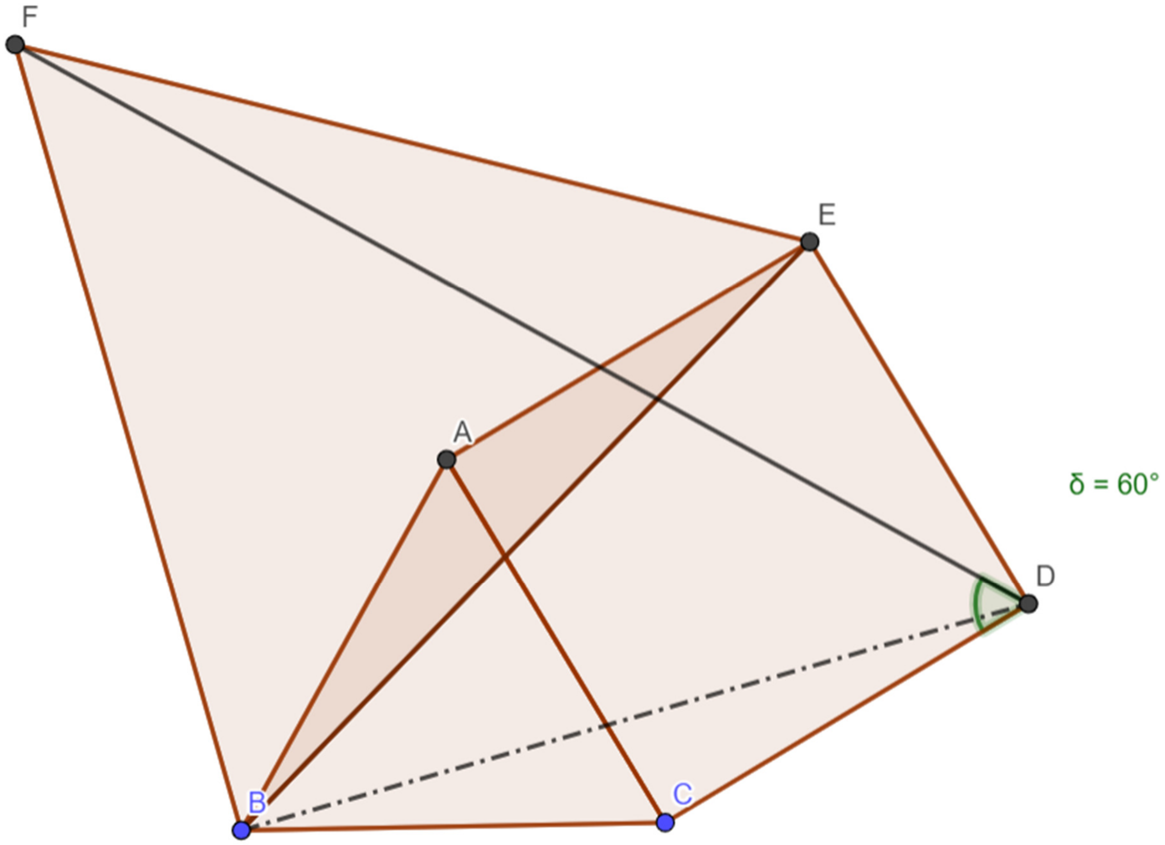
Abbiamo ricevuto risposte da studenti delle seguenti scuole (in ordine di arrivo):

- ITST-Marconi, Campobasso
- Liceo Statale "Giuseppe Berto", Mogliano Veneto (TV)
- Liceo Scientifico ASSTEAS Buccino (SA) – 5 soluzioni
- Liceo Classico-Scientifico Euclide, Cagliari
- Liceo Scientifico Enrico Fermi, Bologna (BO)

Nota. *Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.*

Soluzioni arrivate

1) **Soluzione inviata dalla classe-4ABA-ITST-MARCONI-CAMPOBASSO (tramite l'insegnante)**



DATI
ABC equilatero
BEF equilatero
ACDE quadrato

INCOGNITA
$\widehat{CDF}$

Soluzione:

Il triangolo ABE è isoscele sulla base BE essendo AB=AE

segue $\boldsymbol{\widehat{BAE} = 90° + 60° = 150°}$
e $\boldsymbol{\widehat{BEA} = \widehat{ABE} = 30°/2 = 15°}$

Anche il triangolo BCD è isoscele sulla base BD essendo BC=CD, dunque $\widehat{CDB} = 15°$

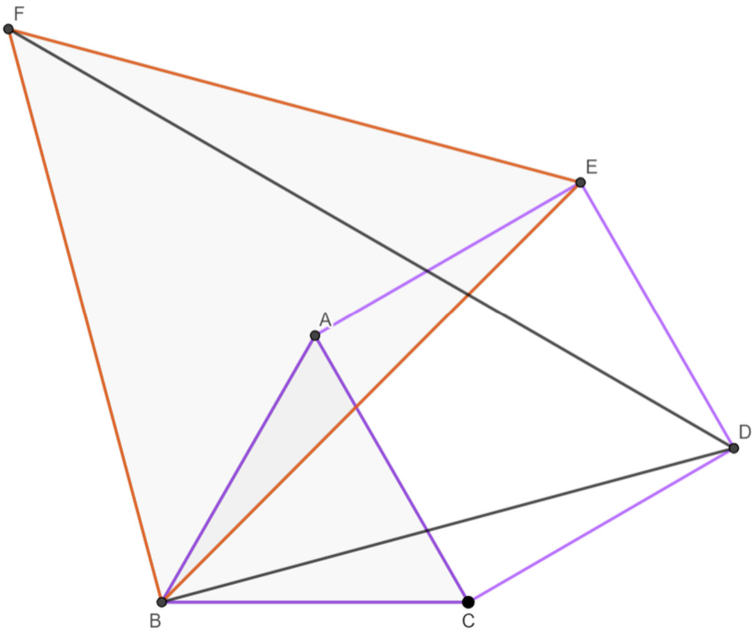
Il triangolo BDF è isoscele sulla base DF e rettangolo in B perché:

- BD=BE=BF
- $\widehat{DBF} = \widehat{DBE} + \widehat{EBF} = 30° + 60° = 90°$

Dunque, per differenza di angoli e per le proprietà dei triangoli equilateri [e] isosceli si ha

$$\widehat{CDF} = \widehat{CDB} + \widehat{BDF} = 15° + 45° = 60°$$

2) Soluzione inviata da Rachele-Pali, classe 2^A - Liceo Statale “Giuseppe Berto”-Mogliano Veneto (TV)



1. ABC è un triangolo equilatero
2. ACDE è un quadrato
3. BEF è un triangolo equilatero

Domanda:
$\widehat{CDF}$ = ?

Dimostrazione:
AB ≅ BC ≅ AC   per ipotesi 1
AC ≅ CD ≅ DE ≅ EA   per ipotesi 2
AB ≅ BC ≅ AC ≅ CD ≅ DE ≅ EA   per proprietà transitiva
  ➔ in particolare: BC ≅ CD ([1])
Si costruisce il segmento BD
BCD è isoscele perché BC ≅ CD   per quanto dimostrato prima ([1])
  ➔ $\widehat{DBC} \cong \widehat{BDC}$ perché angoli alla base di un triangolo isoscele
$\widehat{BCD} \cong \widehat{BCA} + \widehat{ACD}$ = 60° + 90°   perché rispettivamente un angolo di un triangolo [[isoscele]] [equilatero] (ipotesi 1) e un angolo di un quadrato (ipotesi 2)
$\widehat{BAE} \cong \widehat{BCD}$ perché somme di angoli congruenti $\widehat{BCA} \cong \widehat{BAC}$ (per ipotesi 1) e [$\widehat{ACD} \cong \widehat{CAE}$] (per
    ipotesi 2) ([2])
$\widehat{BCD}$ = 150°
$\widehat{BDC} = \frac{180° - \widehat{BCD}}{2} = \frac{180° - 150°}{2}$ = 15°
[per la proprieta’ degli angoli interni di un triangolo]
Considero i triangoli BCD e BAE:

- AB ≅ BC   per ipotesi 1
- AE ≅ CD   per ipotesi 2
- $\widehat{BCD} \cong \widehat{BAE}$ per quanto dimostrato prima ([2])

➔ BCD ≅ BAE per 1° criterio di congruenza dei triangoli

In particolare BD ≅ BE (3)

DBE è isoscele per quanto appena dimostrato

➔ $\widehat{BDE} \cong \widehat{BED} \cong \widehat{CDE} - \widehat{BDC} = 90° - 15° = 75°$ ($\widehat{BDE}$ e BED sono congruenti perché angoli alla base di un triangolo isoscele)

$\widehat{DBE} = 180° - 2\widehat{BDE} = 180° - 2*75° = 30°$

[per la proprieta' degli angoli interni di un triangolo]

BE ≅ BF per ipotesi 3 (4)

BF ≅ BD per proprietà transitiva (3) + (4)

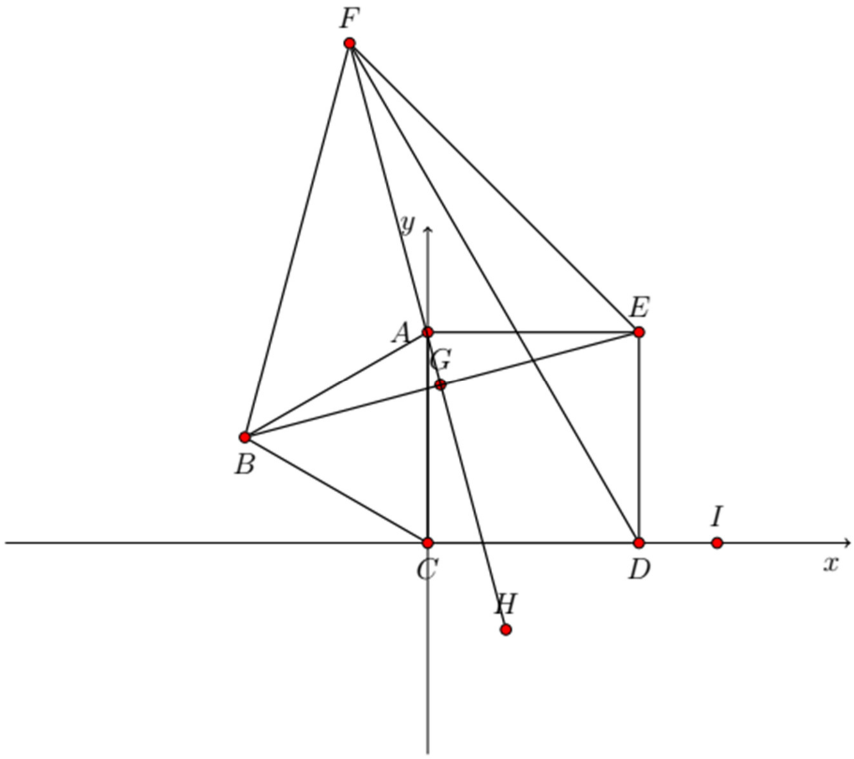
➔ DBF è isoscele

$\widehat{BDF} = \frac{180° - \widehat{DBF}}{2} = \frac{180° - (\widehat{EBF} + \widehat{DBE})}{2} = \frac{180° - (60° + 30°)}{2} = 45°$ ($\widehat{EBF} = 60°$ per ipotesi 3)

In conclusione**: $\widehat{CDF}$** ≅ $\widehat{BDF} + \widehat{BDC} = 45° + 15° =$ **60°.**

[Nota: si usa un simbolo strano per gli angoli invece di usare l'Equation Editor.]

3) Soluzione svolta da: Filomena Dell'Orto, Mariachiara Parisi e Francesca Luordo, Classe 3A Liceo Scientifico ASSTEAS Buccino (SA)



Hp: $\overbrace{ABC}^{\Delta}$ e $\overbrace{BEF}^{\Delta}$ sono triangoli equilateri e $CDEA$ è $un\ quadrato$ Th: $\widehat{CDF} = 60°$

Dimostrazione:

Per comodità prendiamo il lato del quadrato ACDE pari $\overline{AE}$=1

$B = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $C = (0,0)$; $D = (1,0)$; $E = (1,1)$; $A = (0,1)$.

Il triangolo $\overbrace{BAE}^{\Delta}$ è isoscele perché $AE \cong AB$ per costruzione ed essendo $\widehat{A} = 150°$, allora [$\widehat{AEB} = 15°$.] [[$\widehat{E} = 15°$.]] Osserviamo che l'asse del segmento BE passa per A e per il vertice F (l'asse "contiene" la mediana, la bisettrice e l'altezza del triangolo equilatero)

$m_{BE} = \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$, L'asse del segmento BE passa per $A = (0,1)$ e ha coefficiente angolare <u>antireciproco</u> di $\mathrm{m_{BE}} = 2 - \sqrt{3}$. ovvero $\overline{m} = -\frac{1}{2-\sqrt{3}} = -(2+\sqrt{3})$ in forma compatta $\overline{m} = -(2+\sqrt{3})$.

L'angolo [$\widehat{FEA} = 45$ e quindi $\mathrm{m_{EF}} = -1$]

EF: $y - 1 = -1(x-1)$; [[...]] $y = -x + 2$

[FG] [[BE]] : $y - 1 = -(2+\sqrt{3})x$; $y = -(2+\sqrt{3})x + 1$

Per trovare le coordinate del punto F= (x,y)

$$\begin{cases} \mathrm{y} = -\mathrm{x} + 2 \\ y = -(2+\sqrt{3})x + 1 \end{cases} = \begin{cases} \mathrm{y} = -\mathrm{x} + 2 \\ -x + 2 = -(2+\sqrt{3})x + 1 \end{cases} =$$

$$\begin{cases} \mathrm{y} = -\mathrm{x} + 2 \\ -x + 2x + \sqrt{3}x = -1 \end{cases} = \begin{cases} \mathrm{y} = -\mathrm{x} + 2 \\ x = \frac{-1}{1+\sqrt{3}} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \mathrm{y} = -\mathrm{x} + 2 \\ x = +\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} = \begin{cases} y = -(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}) + 2 \\ x = +\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} = \begin{cases} y = \frac{3+\sqrt{3}}{2} \\ x = +\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

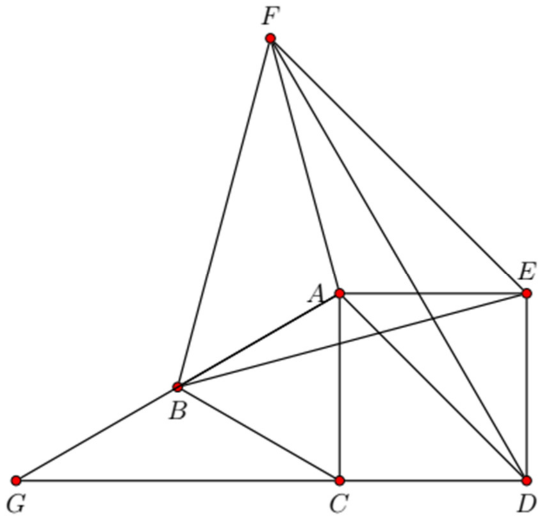
$$F \equiv \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$m_{FD} = \frac{\frac{3+\sqrt{3}}{2}}{-\frac{\sqrt{3}+1}{2}} = -\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = -\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}$$

$$= -\frac{3\sqrt{3} - 3 + 3 - \sqrt{3}}{2} = -\frac{2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$$

[quindi] [[che]] l'angolo $\widehat{IDF} = \hat{\alpha}$ è tale che $tan(\alpha) = -\sqrt{3}$, allora $\alpha = 120°$, deduciamo che l'angolo ad esso adiacente $\widehat{CDF} = 60°$.

4) Soluzione svolta da: Concetta Fornataro, 2A Liceo Scientifico ASSTEAS Buccino (SA)



Ipotesi: ACDE quadrato, $\overbrace{ABC}^{\Delta}$ e $\overbrace{BEF}^{\Delta}$ triangoli equilateri.

Ipotesi: ACDE quadrato, $\overbrace{ABC}^{\Delta}$ e $\overbrace{BEF}^{\Delta}$ triangoli equilateri.
Tesi: $\widehat{CDF} = 60°$

Dimostrazione

Consideriamo il triangolo $\overbrace{ABE}^{\Delta}$, questo è isoscele perché AB = AC ∧ AC = AE ⟹ AB= AE. L'angolo $\widehat{EAB}$=90°+60°= 150°, l'angolo $\widehat{AEB} = \widehat{ABE}$ =(180°-150°):2= 15. Consideriamo i triangoli $\overbrace{BAF}^{\Delta}$ e $\overbrace{EAF}^{\Delta}$, essi sono congruenti per il 3° criterio di congruenza dei triangoli, infatti:

- BF ≅ FE
- FA in comune
- BA ≅ AE

Nel triangolo $\overbrace{EAF}^{\Delta}$ l'angolo $\widehat{AFE}$=30°, l'angolo $\widehat{FEA}$=60°-15°= 45°, quindi l'angolo $\widehat{FAE}$=180°-(45°+30°) = 105°.

Ora soffermiamoci sul triangolo $\overbrace{CBG}^{\Delta}$ ottenuto prolungando i lati AB e CD. L'angolo $\widehat{BCG}$=30° e l'angolo $\widehat{CBG}$=120°, allora l'angolo $\widehat{BGC}$=30° e quindi BG ≅ BC

Consideriamo $\overbrace{AGD}^{\Delta}$, l'angolo in G (già noto) è di 30°, l'angolo in D (anch'esso noto) è di 45° e l'angolo in A=60°+45°= 105°.

I triangoli $\overbrace{GAD}^{\Delta}$ e $\overbrace{EAF}^{\Delta}$ sono simili perché hanno gli stessi angoli.

AE:AD=AF:AG

Da AB=BC=AE=BG sappiamo che AG=2AE

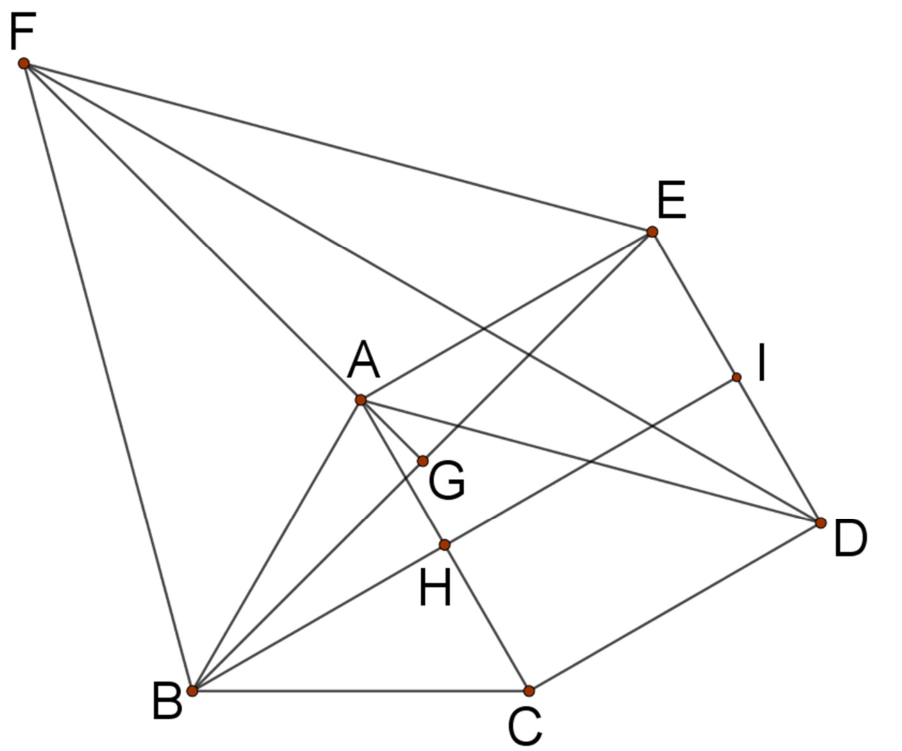
$1:\sqrt{2}$=AF:2

Deve essere AF=$\sqrt{2}$ e anche AD=$\sqrt{2}$

Allora il triangolo $\overbrace{DAF}^{\Delta}$, è isoscele e quindi, [poiché] l'angolo in A è di 105°+45°=150°, l'angolo in D è di (180°-150°):2 = 15°.

Allora considerato l'angolo $\widehat{CDF}$=45°+15°= 60°

5) Soluzione svolta da: Giovanni Forlenza, 2A Liceo Scientifico ASSTEAS Buccino (SA)



[Si doveva spiegare chi sono H, I, G]

Considerando il lato del quadrato L=1

$\overline{HI}= 1$

$\overline{BI}= \overline{HI}+ \overline{BH}= 1+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\overline{BH}= \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\overline{BE} = \sqrt{\overline{EI}^2 + \overline{BI}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$\overline{FG} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{BE} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$\overline{AG} = \sqrt{\overline{AE}^2 - \overline{GE}^2} = \sqrt{1-\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

$$\overline{FA} = \overline{FG} - \overline{AG} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

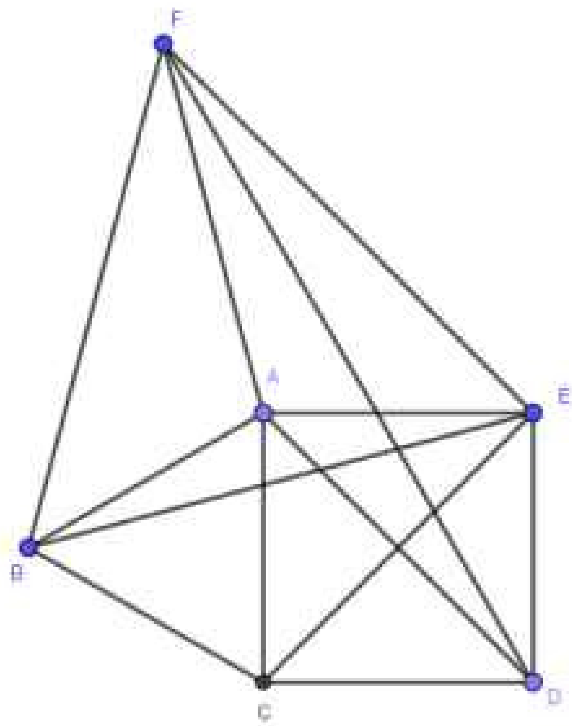
Ricordando le formule dei radicali doppi: $\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\overline{FA} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{2}+\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{2} = \frac{3}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{4}\sqrt{2} = \left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}.$$

$$\overline{FA} = \overline{AD} = \sqrt{2}$$

[In un triangolo, due lati sono uguali se e solo se gli angoli opposti sono uguali]], **questo implica che** $\widehat{AFD}$**=**$\widehat{ADF}$
$\widehat{FAD}$= 150° [perché ?]
$\widehat{AFD}$**=**$\widehat{ADF}$= 15°
$\widehat{CDA}$=45° [[(angolo complementare)]] [AD diagonale di un quadrato]
$\widehat{CDF}$=45°+15°=60°

6) Soluzione proposta da Marianna Manna 3B Liceo Scienze Applicate ASSTEAS_Buccino (SA)

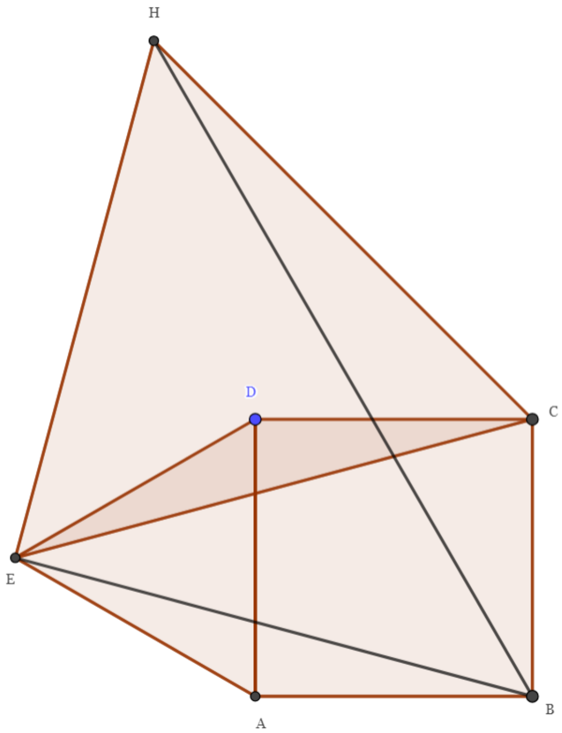


IPOTESI:
ACDE quadrato
ABC equilatero di lato AC
BEF equilatero

Tesi:
$\widehat{FDC} = 60°$

Dimostrazione:
ABE isoscele poiché $\overline{AB} \cong \overline{AE}$, allora $\widehat{ABE} \cong \widehat{AEB}$
$\hat{A} = 90 + 60 = 150°$
$$\widehat{ABE} \cong \widehat{AEB} = \frac{180 - 150}{2} = 15°$$
Congiungiamo A con F
Congiungiamo E con C
Consideriamo i triangoli BEC e AFE
$BEC \cong$ AFE poiché:
$\overline{BC} \cong \overline{AE}$ per costruzione
$\overline{BE} \cong \overline{FE}$ per costruzione
$\widehat{EBC} \cong \widehat{FEA}$=45° [perché ?]
⇒ Per il primo criterio di congruenza dei triangoli, essi sono congruenti ed in particolare avranno $\overline{CE} \cong \overline{FA}$.
Possiamo dire che ADF è isoscele perché da $\overline{AD} \cong \overline{CE}$ poiché diagonali del quadrato, da $\overline{CE} \cong \overline{FA}$ segue che $\overline{AF} \cong \overline{AD}$ ⇒ Gli angoli alla base sono congruenti. Ora $\widehat{FAD} = 45 + 105 = 150°$, $\widehat{AFD} \cong \widehat{ADF} = \frac{180-150}{2} = 15°$. Quindi possiamo affermare che $\widehat{FDC} = 45° + 15° = 60°$
c.v.d.

7) Soluzione proposta da Myriam Lullo 2A Liceo Scientifico ASSTEAS Buccino (SA)



[Si potevano usare le lettere del testo !!]

DATI

ABCD è un quadrato

ADE è un triangolo equilatero

CEH è un triangolo equilatero

[[HBE]]=? [HBA]

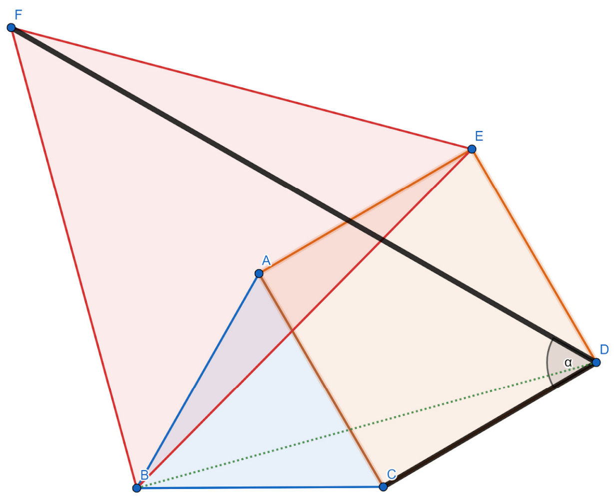
PROCEDIMENTO

Noi sappiamo che ADE è un triangolo equilatero quindi i suoi angoli saranno tutti e tre di 60° ciascuno. ABCD è un quadrato, quindi i suoi angoli sono di 90°. Il triangolo $\overset{\Delta}{\overbrace{EDC}}$ ha l'angolo $\widehat{EDC} = 90° + 60° = 150°$ ed è isoscele perché i lati $DC \cong DE$, quindi $\widehat{CED} = \widehat{DCE}$ = $(180° - 150°): 2 = 15°$ Ora congiungiamo E con B e dimostriamo che $\overset{\Delta}{\overbrace{EDC}} \cong \overset{\Delta}{\overbrace{EAB}}$; i lati adiacenti all'angolo in [[$\hat{B}$]] [D] sono rispettivamente congruenti ai lati adiacenti all'angolo in $\hat{A}$, gli angoli stessi sono congruenti e quindi i due triangoli sono congruenti per il primo criterio di congruenza, segue che $EB \cong EC$

L'angolo $\widehat{CEB} = 30°$, dunque l'angolo $\widehat{HEB} = 90°$.

Da $EB \cong EC$ segue per transitività che $EB \cong EH$ e di conseguenza il triangolo $\widehat{HEB}$ è rettangolo isoscele. L'angolo $\widehat{EBA} = 15°$ e l'angolo $\widehat{HBE} = 45°$, quindi $\widehat{HBA} = 45° + 15° = 60°$. QUINDI $\widehat{HBA}$ =60°

8) Soluzione proposta da Lorenzo Onnis – Sebastiano Murgia – Luca Sanna – 3 Bs Liceo Euclide Cagliari



Ipotesi

ABC è equilatero
ACDE è un quadrato
BEF è equilatero

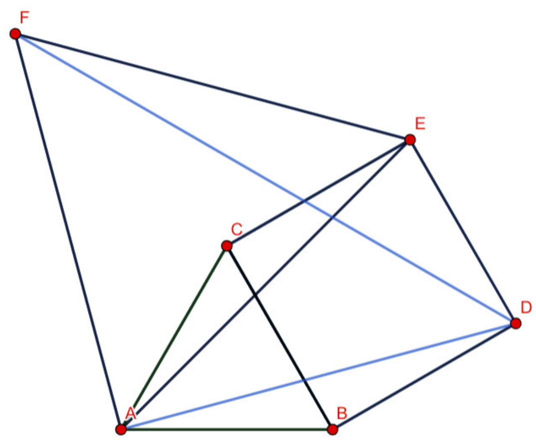
Incognita

$F\widehat{D}C$=?

Soluzione

Possiamo notare che il triangolo BCD è isoscele sulla base BD, poiché BC è congruente a AC in quanto lati di un poligono regolare e per il medesimo motivo anche CD è congruente a AC, e che il segmento BD è congruente a BE [perché ?] e quindi al lato del triangolo BEF.
Notiamo perciò che il triangolo BDF è isoscele, e l'angolo in B ha ampiezza pari a 90° dato che è uguale alle somma degli angoli $A\hat{B}C$ e $F\hat{B}E$ entrambi di 60°, perché angoli di triangoli equilateri, meno la somma degli angoli $A\hat{B}E$ e $C\hat{B}D$, entrambi di 15°; pertanto l'angolo $B\widehat{D}F$ sarà di 45°.
Gli angoli $B\widehat{D}C$ e $C\hat{B}D$ hanno ampiezza 15° perché nel triangolo isoscele BCD l'angolo in C è un angolo di 150° ottenuto sommando l'angolo di 60° del triangolo equilatero ABC a quello di 90° del quadrato [andavo detto prima] ; sommando gli angoli $B\widehat{D}F$ e $B\widehat{D}C$, otteniamo l'angolo $F\widehat{D}C$ di 60°.

9) Soluzione proposta da Eleonora Quattrini 2F, Liceo Scientifico Enrico Fermi, Bologna (BO)



[Le lettere indicate in figura non rispettano quelle del testo del problema. Fortunatamente poi nella risoluzione si usano quelle del testo del problema. Attenzione !!]

Ipotesi:

- ABC triangolo equilatero
  - AB≅BC≅CA
  - angoli ABC≅BCA≅CAB≅ 60°

- ACDE quadrato
  - AC≅CD≅DE≅EA
  - AC⊥AE
  - ED⊥CD

- BEF triangolo equilatero
  - BE≅EF≅FB
  - angoli BEF≅EFB≅FBE≅ 60°

Tesi:

- angolo CDF?

Dimostrazione:

AC≅AB≅BC per ipotesi
AC≅CD≅DE≅AE per ipotesi

AB≅AE per proprietà transitiva
angoli ABE≅AEB per il teorema del triangolo isoscele

BC≅CD per proprietà transitiva
angoli CBD≅BDC per il teorema del triangolo isoscele

angoli BAE≅BAC+CAE≅60°+90°≅ 150°
angoli BCD≅BCA+ACD≅60°+90°≅ 150°
⇓
angoli BAE≅BCD

angoli ABE≅(π-BAE)/2
angoli CBD≅(π-BCD)/2
angoli ABE≅CBD≅(180°-150°)/2≅ 15°

Considero i triangoli

ABE	e	BCD	
angoli BAE	≅	BCD	per dimostrazione precedente
BA	≅	BC	per ipotesi
AE	≅	CD	per ipotesi

⇓
triangoli ABE≅BCD per I c.d.c. dei triangoli [primo criterio]
⇓
BE≅BD

BE≅BF per ipotesi
BF≅BD per proprietà transitiva

angoli BFD≅BDF per il teorema triangolo isoscele

angoli FBA≅FBE-ABE≅60°-15°≅ 45°
angoli FBD≅ABC+FBA-CBD≅60°+45°-15°≅ 90°

angoli BDF≅(π-FBD)/2≅(180°-90°)/2≅ 45°

angoli CDF≅CDB+BDF≅15°+45°≅ 60° c.v.d.